Theoretische Physik I:

Vorlesung 20: Schwingungen II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Heute diskutieren wir Schwingungen weiter.

- Hauptachsentransformation
- Externe Kräfte auf gekoppelten Oszillatoren
- Viele gekoppelte Oszillatoren – Kontinuumnäherung

2: Das letzte Mal

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

N gekoppelte harmonische Oszillatoren haben die Lagrangefunktion

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}\dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j - \frac{1}{2} q_i V_{ij} q_j$$

die Bewegungsgleichungen

$$T_{ij}\ddot{q}_j + V_{ij} q_j = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_i = \sum_w a_{i,w} \left(c_{wc} \cos(\omega_w t) + s_{ws} \sin(\omega_w t)\right) \,,$$

wobei $a_{i,w}$ und ω_w^2 die Eigenvektoren beziehungsweise Eigenwerte der Matrix $T^{-1} V$ sind.

Aber wir haben so lange über die Nützlichkeit von Koordinatentransformationen bei der Vereinfachung von Problemen diskutiert. Können wir das hier tun?

3: Orthogonalität der Eigenvektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir haben schon gesehen: bei N Koordinaten haben wir N Eigenwerte ω_r und N Eigenvektoren $a_{i,r}$:

$$\Big(-\omega_r^2 T_{ij} + V_{ij}\Big) a_{jr} = 0$$

Hier ist Det $(-\omega_r^2 T_{ij} + V_{ij}) = 0$ oder ω_r^2 ist ein Eigenwert und a_{jr} ein Eigenvektor der Matrix $T^{-1}V$.
Für zwei unterschiedliche Eigenwerte ω_r, ω_s haben wir:

$$\omega_r^2 T_{ij} a_{j,r} = V_{ij} a_{j,r} \qquad \Rightarrow \qquad a_{i,s}\omega_r^2 T_{ij} a_{j,r} = a_{i,s} V_{ij} a_{j,r} \tag{1}$$

$$\omega_s^2 T_{ji} a_{i,s} = V_{ji} a_{i,s} \qquad \Rightarrow \qquad a_{i,s}\omega_s^2 T_{ij} a_{j,r} = a_{i,s} V_{ij} a_{j,r} \tag{2}$$

(Hier benutzen wir $T_{ij} = T_{ji}$ und $V_{ij} = V_{ji}$.) Deshalb ist

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) a_{i,s} T_{ij} a_{j,r} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{i,s} T_{ij} a_{j,r} = \delta_{rs} \quad \text{und} \quad a_{i,s} V_{ij} a_{j,r} = \omega_r^2 \delta_{rs}$$

wenn ich die $a_{i,r}$ richtig normalisiere. Das ist eine Sorte von Orthogonalität.

Wenn zwei Eigenwerte gleich sind, $\omega_r = \omega_s$, kann ich das Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren benutzen, um $a_{s,i} T_{ij} a_{r,j}$ zu sichern.

4: Neue Koordinaten (Hauptachsentransformation)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir nehmen als Koordinaten Q_r, wobei

$$q_i = \sum_r a_{i,r} Q_r \,, \quad \dot{q}_i = \sum_r a_{i,r} \dot{Q}_r$$

(im Folgenden werde ich die Einstein'sche Summationskonvention benutzen)

Ich kann die Lagrangefunktion in diesen neuen Koordinaten umschreiben:

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) = L'(Q, \dot{Q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j - \frac{1}{2} q_i V_{ij} q_j \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}_s a_{i,s} T_{ij} a_{j,r} \dot{Q}_r - \frac{1}{2} Q_s a_{i,s} V_{ij} a_{j,r} Q_r \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}_s \delta_{sr} \dot{Q}_r - \frac{1}{2} Q_s \omega_r^2 \delta_{sr} Q_r \\ &= \sum_r \left(\frac{1}{2} \dot{Q}_r \dot{Q}_r - \frac{1}{2} \omega_r^2 Q_r Q_r \right) \end{aligned}$$

In dieser Basis ist T die Identitätsmatrix, und V ist diagonal.

Die Bewegungsgleichungen sind auch einfach: $\ddot{Q}_r = -\omega_r^2 Q_r$

5: Externe Kräfte

Was passiert, wenn externe Kräfte auf die Massen einwirken?

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}_i T_{ij}\dot{q}_j - \frac{1}{2} q_i V_{ij} q_j + F_i^{\text{ext}} q_i \qquad \Rightarrow \qquad T_{ij}\ddot{q}_j = -V_{ij} q_j + F_i^{\text{ext}}$$

Für *sinusförmige* Kräfte $F_i(t) = F_i e^{-i\omega t}$ können wir raten:

$$q_i(t) = \underline{q}_i e^{-i\omega t}\,, \qquad \left(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}\right) \underline{q}_j = F_i\,.$$

$\underline{q}_j = a_{j,r}\underline{Q}_r$ und mal $a_{s,i}$ multiplizieren:

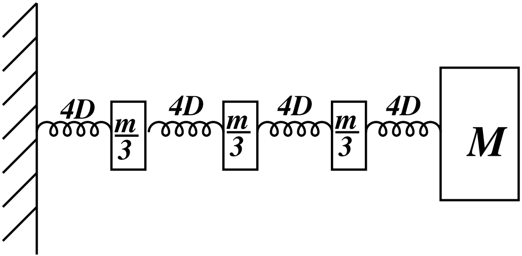
$$a_{i,s}\left(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}\right) a_{j,r}\underline{Q}_r = a_{i,s}F_i \quad \Rightarrow \quad (\omega_r^2 - \omega^2)\underline{Q}_r = a_{i,r}F_i\,.$$

Und endlich für $\underline{q}_i$ lösen:

$$\underline{Q}_r = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} a_{i,r} F_i, \qquad \underline{q}_j = \sum_r a_{j,r}\underline{Q}_r = \sum_{r,i} a_{j,r}\frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} a_{i,r} F_i\,.$$

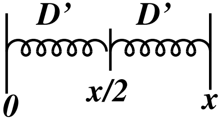
6: Massive Feder

Eine Masse M hängt auf einer Feder mit Federkonstante D und Masse m. Was sind die möglichen Schwingungen?



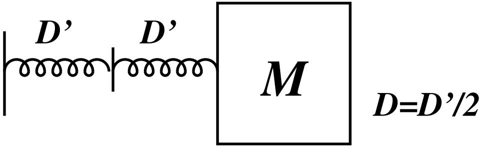
Ich kann m als N kleinere Massen, Masse m/N, und die Feder als $N+1$ Federn mit Federkonstanten $(N+1)D$ annähern

m/N ist klar. Aber warum $(N+1)D$?

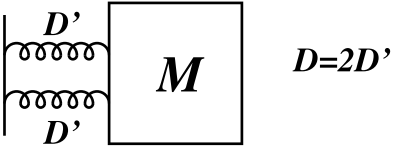


Wenn das Ende am Punkt x liegt, dann liegt die Mitte bei $x/2$. Die Kraft $F = xD$. Das ist auch die Kraft auf dem Mittelpunkt. $F = (x/2)D' = xD$; deshalb ist $D' = 2D$.

7: Federn in Reihe und parallel



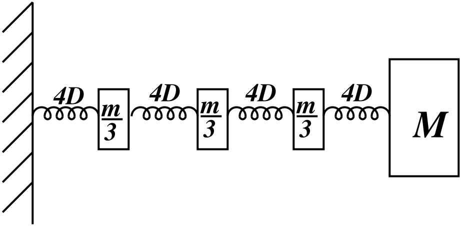
Reihe: Gesamtfeder ist schwächer, $D = D'/2$



Parallel:
$F = F_1 + F_2 = xD' + xD' = x(2D')$
und $D = 2D'$
Feder ist stärker

Koordinaten: $x_1, ..., x_N$ und x_f.
Massen: $m/N, ..., m/N; M$.

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2N}\dot{x}_i^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_f^2$$



Potentielle Energie

$$V = \frac{(N+1)D}{2}\left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{N-1}(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_f - x_N)^2\right)$$

T und V als Matrizen:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{m}{N} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{m}{N} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{N} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & M \end{bmatrix} \qquad V_{ij} = \begin{bmatrix} 2ND & -ND & 0 & ... & 0 \\ -ND & 2ND & -ND & ... & 0 \\ 0 & -ND & 2ND & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & -ND \\ 0 & 0 & ... & -ND & ND \end{bmatrix}$$

9: Aber kann ich das lösen?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ja, numerisch. Aber auch analytisch!
Um das einfacher zu machen, betrachten wir $M \gg m$. Dann ist $x_f = 0$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{m}{N} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 \\ ... & 0 & \frac{m}{N} \end{bmatrix}, \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} 2ND & -ND & ... \\ -ND & ... & -ND \\ ... & -ND & 2ND \end{bmatrix}$$

Wir *raten*, dass

$$q_{i,\ell} = e^{-i\omega t} \begin{bmatrix} \sin\frac{1\ell\pi}{N+1} \\ \sin\frac{2\ell\pi}{N+1} \\ ... \\ \sin\frac{N\ell\pi}{N+1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{ij}q_{j,\ell} = e^{-i\omega t} \begin{bmatrix} ND\left(-\sin\frac{0\ell\pi}{N+1} + 2\sin\frac{1\ell\pi}{N+1} - \sin\frac{2\ell\pi}{N+1}\right) \\ ND\left(-\sin\frac{1\ell\pi}{N+1} + 2\sin\frac{2\ell\pi}{N+1} - \sin\frac{3\ell\pi}{N+1}\right) \\ ... \\ ND\left(-\sin\frac{(N-1)\ell\pi}{N+1} + 2\sin\frac{N\ell\pi}{N+1} - \sin\frac{(N+1)\ell\pi}{N+1}\right) \end{bmatrix}$$

Aber $-\sin(A-B) + 2\sin(A) - \sin(A+B) = \sin(A)(2 - 2\cos(B))$ und deshalb

$$V_{ij}q_{j,\ell} = 2ND\left(1 - \cos\frac{\ell\pi}{N+1}\right)q_{j,\ell}$$

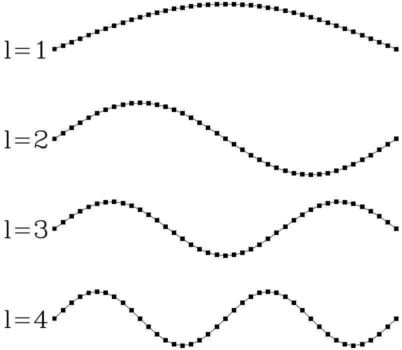
(aber nur wenn $\ell \in \mathcal{Z}$, so dass $\sin(\ell\pi) = 0$)

$$-T_{ij}\ddot{q}_{j,\ell} = V_{ij}q_{j,\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{N}\omega_\ell^2 = 2ND\left(1 - \cos\frac{\ell\pi}{N+1}\right)$$

Für $\ell \ll N$ ist das $\omega^2 = D\ell^2\pi^2/m$.

10: Was bedeuten die Eigenvektoren?

Ein System von N gekoppelten Oszillatoren hat N Muster, in denen es schwingen kann. Die Eigenvektoren geben genau die Muster.



Zum Beispiel, bei $N \gg 1$ Massen in einer Reihe sind die Eigenwerte $\omega_\ell = \pi\ell\sqrt{M/D}$ und die N Eigenvektoren sind $a_{i,\ell} = \sin(\pi\, i\ell/N)$.

Diese sind die Moden einer Geigensaite.
Die Frequenzen sind gleichmäßig verteilt, was die Saite musikalisch klingen lässt.

Huh? Warum hat das funktioniert? Für $N \gg 1$ ist

$$V_{ij} q_j = ND \left(-q_{j-1} + 2q_j - q_{j+1} \right)$$

Wir nennen die Weite zwischen Massen dx. Wenn die Feder eine Länge L hat, ist $dx = L/N$. Dann ist

$$\begin{aligned} V_{ij} q_j &= ND\,(-q(x-dx) + 2q(x) - q(x+dx)) \\ &= ND(dx)^2 \frac{-q(x-dx) + 2q(x) - q(x+dx)}{(dx)^2} \\ &= -\frac{DL^2}{N} \frac{d^2 q}{dx^2} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für $q(x)$ ist:

$$\frac{m}{N} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{DL^2}{N} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 q = \frac{DL^2}{m} \partial_x^2 q$$

Die Einheiten von DL^2/m sind $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, eine quadratische Geschwindigkeit.

12: Wellengleichung

Wir nennen $DL^2/m \equiv c_s^2$ das Quadrat der Wellengeschwindigkeit und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x,t) = c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x,t) \qquad \text{die Wellengleichung}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$q(x,t) = q_1(x - c_s t) + q_2(x + c_s t)$$

Wirklich? Ist das nicht zu einfach?

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) = q_1'(x - c_s t) + q_2'(x + c_s t) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x,t) = q_1''(x - c_s t) + q_2''(x + c_s t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x,t) = -c_s q_1'(x - c_s t) + c_s q_2'(x + c_s t) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x,t) = c_s^2 q_1''(x - c_s t) + c_s^2 q_2''(x + c_s t) = c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x,t)$$

$q_1(x - c_s t)$ ist eine rechts bewegende Welle: $q_1(x, 0) = q_1(x + ct, t)$.
$q_2(x + c_s t)$ ist eine links bewegende Welle: $q_2(x, 0) = q_2(x - c_s t, t)$.

Hier fängt Elastizitätstheorie an. Aber wir haben leider keine Zeit dafür

13: Summary in English

Once we have solved the eigenvalue/eigenvector problem for $T^{-1}V$,

$$T^{-1}_{ik}V_{kj}a_{j,r} = \omega_r^2 a_{i,r}$$

we can use it to change variables, $q_i = \sum_r a_{i,r}Q_r$. In this basis T is an identity matrix and V is diagonal, with the ω^2 values along the diagonal.
The response to an external force $F_i(t) = e^{-i\omega t}F_i$ is:

$$q_j(t) = e^{-i\omega t}\sum_{r,i} a_{j,r}\frac{1}{\omega_r^2-\omega^2}a_{i,r}F_i\,.$$

Springs in parallel have $D = D_1 + D_2$. In series, $1/D = 1/D_1 + 1/D_2$.
A massive spring is a series of (stiff) springs in series, with masses between, adding up to the total spring mass.
This can be solved by the finite-element method. Or we can treat it as a continuum problem, and we find the wave equation.