# Theoretische Physik I:

## Vorlesung 21: Relativitätstheorie I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bisher haben wir nur *nicht-relativistische* Mechanik diskutiert.
~~Das ist alles falsch!~~ (Zu pessimistisch)

Das ist eine *Näherung*, weil Natur *relativistisch* ist.
Die nächsten 2 Wochen werden wir **spezielle Relativitätstheorie** diskutieren.
Das dauert 2 Wochen (4 Vorlesungen):

1. Galileische Relativität
   Lichtgeschwindigkeit und seine Konsequenzen: **Zeitdilatation**, **Längenkontraktion**, **Relativität der Gleichzeitigkeit**
2. **Lorentz-Transformationen**, **Addition von Geschwindigkeiten**
3. **Minkowski-Diagramm**, die klassische Paradoxe
4. **Eigenzeit**, Lagrange und Hamilton in Relativitätstheorie

# 2: Galileische Relativität

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sie haben eine Sorte von Relativität schon gesehen – **Galileische Relativität**.
Wir haben es in den ersten Vorlesungen diskutiert, aber nicht benannt.
Jetzt diskutieren wir sie weiter.
**Newton I** sagt, dass es eine – oder mehrere – Bezugssysteme gibt.
Sind verschiedene Bezugssysteme, in Bewegung relativ einander, wirklich äquivalent?
Um das zu beantworten, betrachten wir ein generisches Hamiltonsystem.
Betrachten Sie ein System mit $N$ Teilchen, Koordinaten $\vec{q}_i$ ($i = 1, \ldots, N$) und Impulse $\vec{p}_i$. Die generische Hamilton-Funktion ist

$$H(\vec{q}_i, \vec{p}_i) = \sum_i \frac{1}{2m_i} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i + V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$$

Für ein System ohne Umgebung, darf $V$ nur von Koordinatenunterschiede abhängig sein.
Die Frage ist: können wir dieses System in ein anderes Bezugssytem umschreiben? Ändert es sich, oder bleibt es gleich?

$$H(\vec{q}_i, \vec{p}_i) = \sum_i \frac{1}{2m_i} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i + V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$$

Betrachten Sie eine kanonische Transformation 2. Art: $F(q, P) = \sum_i (\vec{q}_i + \vec{v}t) \cdot (\vec{P}_i - m_i\vec{v})$:

$$\vec{p}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}_i} = \vec{P}_i - m_i\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{P}_i = \vec{p}_i + m_i\vec{v}$$

$$\vec{Q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{P}_i} = q_i + \vec{v}t \qquad \Rightarrow \qquad \vec{Q}_i = \vec{q}_i + \vec{v}t$$

Unsere Hamilton-Funktion in den neuen Variablen ist:

$$\begin{aligned} K(Q, P, t) &= H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{1}{2m_i} \left(P_i - m_i\vec{v}\right)^2 + V(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|) + \sum_i \vec{v} \cdot \left(\vec{P}_i - m_i\vec{v}\right) \\ &= \sum_i \frac{1}{2m_i} \vec{P}_i \cdot \vec{P}_i + V(|\vec{Q}_i - \vec{Q}_j|) - \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}^2 \end{aligned}$$

die identische Form wie vorher, plus eine irrelevante Konstante.

# 4: Galileische Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Transformation

$$\vec{Q}_i = \vec{q}_i + \vec{v}t\,, \qquad \vec{P}_i = \vec{p}_i + m_i\vec{v}$$

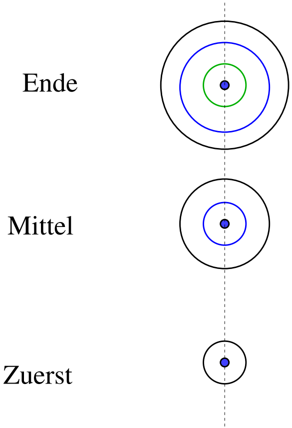
ändert sich die Hamilton-Funktion nur durch eine irrelevante Konstante.
Deshalb ist die Physik identisch in diesen neuen Veriablen.
Die Transformation ist genau ein relativer Geschwindigkeitsunterschied.
Diese Äquivalenz wird als **Galileische Relativität** bezeichnet.

Für später: wenn $\vec{v} = v\hat{e}_x$ ändern sich die Koordinaten durch:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

# 5: Schallgeschwindigkeit

Schall hat eine endliche Geschwindigkeit: $v_s = 341\ \mathrm{m/s}$.
Wie ist das konsistent mit Galileischer Relativität?




Eine Schallquelle sendet drei Schallstöße aus. Sie breiten sich in sphärischen Wellen aus. Ich kann die Entfernung als Funktion der Zeit messen, und finde: $v = c_s = 341\mathrm{m/s}$.

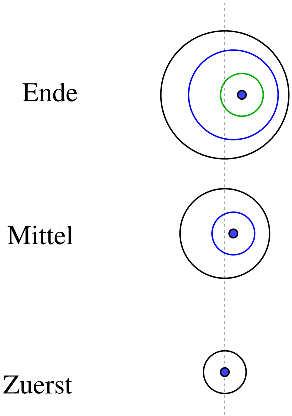
Hier und im Folgenden schreibe ich die aufeinanderfolgenden Zeiten vertikal, wobei die früheste Zeit unten und die späteste Zeit oben steht.

So weit – kein Problem.

# 6: Schallgeschwindigkeit, Quelle in Bewegung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Und wenn die Quelle in Bewegung ist?



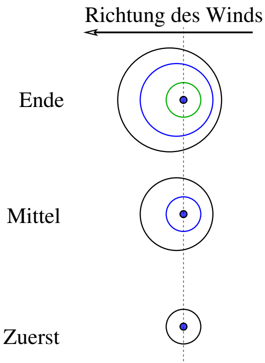

Die Schallstöße breiten sich in sphärischen Wellen aus, wie vorher.
Aber die Sphären haben unterschiedliche Mittelpunkte!
Der Mittelpunkt liegt wo die Quelle war, als der Stoß gesendet wurde.

Das sieht nicht gleich aus, als wenn die Quelle still bleiben würde.

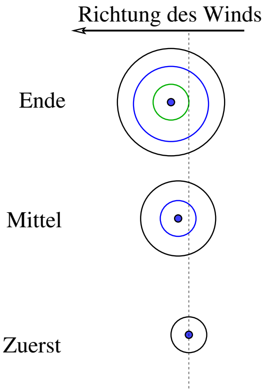
# 7: Windgeschwindigkeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Um dieses Rätsel zu lösen, müssen wir auch *Windgeschwindigkeit* betrachten!




Links: Wind bläst, Schallquelle bleibt still.
Rechts: Schallquelle bewegt sich mit dem Wind.
Links ist wie wenn die Quelle sich bewegt – aber in einem anderen Bezugssystem.
Rechts ist wie wenn die Quelle still ist – aber in einem anderen Bezugssystem.




Alles ist bezugssystemunabhängig – nachdem wir uns erinnern, dass es Luft und Wind gibt!

## 8: Lichtgeschwindigkeit

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Licht hat auch eine endliche Vakuumgeschwindigkeit: $c = 2,99792458 \times 10^8$ m/s
*In welche Richtung?* Die Geschwindigkeit ist gleich in alle Richtungen.
Ist das wie Schall? Gibt es ein Medium, auch in Vakuum? **Aether?**
Wenn ja, wohin die Relativitätstheorie?

**Einsteinsche Postulate**

1. Ein Beobachter sieht Lichtsgeschwindigkeit (in Vacuo) als gleich in alle Richtungen, unabhängig von der Geschwindigkeit des Senders.
2. Trotzdem stimmt Relativität: Die physikalischen Gesetze sind gleich in allen Bezugssystemen. Alle Bewegungen müssen als relativ angesehen werden.

Wie kann das sein? Nur mit Hilfe von drei weiteren Effekten:

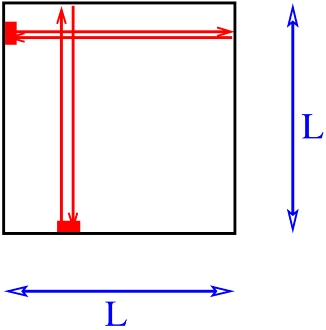
- **Zeitdilatation**
- **Längenkontraktion**
- **Relativität der Gleichzeitigkeit**

Wir werden nun diese drei Effekte ableiten.

# 9: Uhren in Bewegung



Bemerkung: 2 Uhren, die im Ruhezustand gleich schnell ticken, werden gleich schnell ticken, wenn sich beide mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen. Das hat mit Relativität zu tun, da die Uhren Licht und Lichtgeschwindigkeit benutzen.



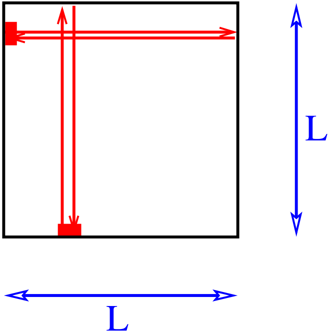

Hier sind zwei Uhren, die Licht benutzen.
Ein Kasten ist $L$ breit und $L$ lang.
Zwei Pulslaser feuern Pulse auf Spiegel ab, die sie zu Detektoren zurückreflektieren. Wenn das Licht zurückkehrt, wird der nächste Impuls gesendet - dies ist ein “Tick.”

Eine der Uhren benutzt die $x$-Richtung, die andere die $y$-Richtung.

Wenn die Uhren ruhig bleiben, dauert ein “Tick” $\Delta t = 2L/c$.

# 10: Licht muss hin und zurück gehen

Betrachten wir wieder unsere Uhr:

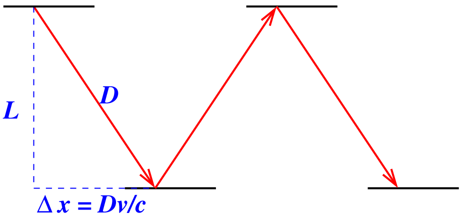



Warum muss Licht hin *und her* laufen? Warum nehmen wir nicht einen "Sekundentick" der Uhr als die Zeit, die das Licht benötigt, um vom Laser bis zum Spiegel zu gehen?

Mein Laser *kann nicht wissen*, wenn Licht den Spiegel erreicht. Der Spiegel muss ein *Signal* geben, dass das Licht angekommen ist. Was kann dieses Signal sein? Licht, natürlich!
Und dieses Signal muss zurück geschickt werden...

# 11: Zeitdilatation I

Und wenn der Kasten sich in $x$-Richtung bewegt?
Betrachten wir zuerst die Uhr mit Licht in $y$-Richtung:

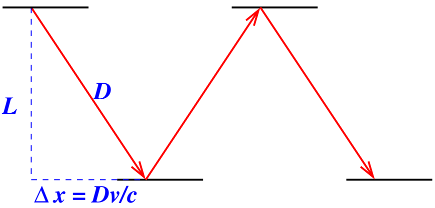



Wenn das Licht sich bewegt, bewegt sich auch der Kasten! Anstelle von $L$ muss sich das Licht in einer Weite von $D = \sqrt{L^2 + (\Delta x)^2}$ bewegen.

Was ist $\Delta x$? $\Delta x = vt$.
Und $t = D/c$, weil Licht sich mit Geschwindigkeit $c$ bewegt.

# 12: Zeitdilatation II






$$D = \sqrt{L^2 + (\Delta x)^2}$$
$$t = D/c$$
$$\Delta x = vt = vD/c$$

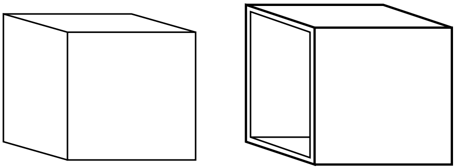
$$D = \sqrt{L^2 + v^2 D^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad D^2 = L^2 + \frac{v^2}{c^2} D^2 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ein Tick dauert jetzt $\Delta t = 2D/c = (2L/c)(1/\sqrt{1 - v^2/c^2})$.

*Eine Uhr in Bewegung mit Geschwindigkeit $v$ läuft langsamer:*
$\Delta t_{\text{Bewegung}} = \Delta t_{\text{Ruhe}}/\sqrt{1 - v^2/c^2} \equiv \gamma\, \Delta t_{\text{Ruhe}}$.
Das nennen wir **Zeitdilatation.** Wir nennen $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \geq 1$.

# 13: Bleibt $L$ wirklich gleich?

Wir sagen, dass die $y$-Länge immer noch $L$ ist.
Stimmt das? Oder könnte sich das auch irgendwie ändern?
*Kann die transversale Länge sich ändern?*



Nehmen wir an, wir werfen den Kasten in Richtung eines quadratischen Tunnels. Wenn der Tunnel gerade größer als der Kasten ist, dann passt der Kasten einfach durch.

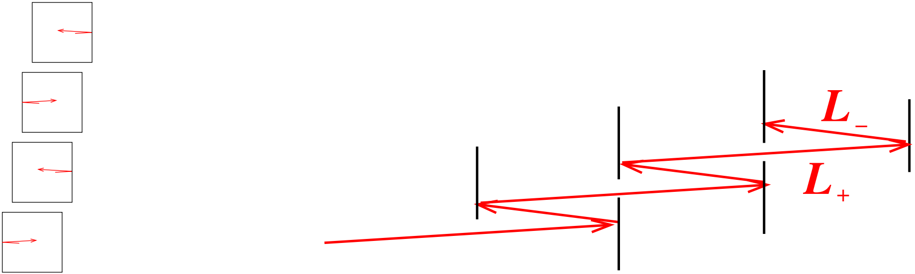
Wenn transversale Längenkontraktion passiert, kommt der Kasten durch und hat noch Platz. Aber wenn der Kasten still bleibt und der Tunnel sich bewegt, kontraktiert der Tunnel, und der Kasten passt nicht mehr durch.
Aber Relativität sagt, dass die zwei äquivalent sind!
*Deshalb muss transversale Größe gleich bleiben.*

*Dieser Beweis gilt nur für die Querlänge, nicht für die Länge entlang der Bewegungsachse.*

# 14: Die zweite Uhr



Und die Uhr, wo sich das Licht im $x$-Richtung vorwärts und rückwärts bewegt?




Das Licht muss sich weiter in $+x$-Richtung bewegen, aber kürzer in $-x$-Richtung.

# 15: Längenkontraktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir nennen die $x$-Länge $L'$ (muss nicht = $L$ sein)
Die Zeit, vorwärts in $+x$-Richtung zu gehen, ist $\Delta t_+$
Die Zeit, rückwärts in $-x$-Richtung zu gehen, ist $\Delta t_-$
In Zeit $\Delta t$ ändert sich der Laser/Spiegelstandort $\Delta L = \pm v \Delta t$. Deshalb ist

$$L_+ = L' + v\Delta t_+ \qquad \Delta t_+ = \frac{L_+}{c} \qquad \Delta t_+ = \frac{L'}{c-v}$$

$$L_- = L' - v\Delta t_- \qquad \Delta t_- = \frac{L_-}{c} \qquad \Delta t_- = \frac{L'}{c+v}$$

$$\Delta t = \Delta t_+ + \Delta t_- \qquad \Delta t = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} \qquad \Delta t = \frac{2L'}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\text{y-Uhr:} \quad \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \Delta t = \frac{2L'}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{x-Uhr}$$

Deshalb ist: $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$ oder $L = \gamma\, L'$ **Längenkontraktion**

# 16: Aber Warte mal!



Betrachten Sie 2 BeobachterInnen. Jede(r) hat so eine Uhr.
Sie bewegen sich mit Relativgeschwindigkeit $v$.

- BeobachterIn $A$ findet, dass $B$ kürzer geworden ist, und $B$'s Uhr läuft zu langsam;
- BeobachterIn $B$ findet, dass $A$ kürzer geworden ist, und $A$'s Uhr läuft zu langsam.

Wie können beide Recht haben?

**Relativität der Gleichzeitigkeit.** Das diskutieren wir beim nächsten Mal.

# 17: Summary in English

Galilean relativity: provided $V(q_i)$ depends only on coordinate differences, then I can transfrom $\vec{Q}_i = \vec{q}_i + \vec{v}t$ and $\vec{P}_i = \vec{p}_i + m_i\vec{v}$ and the new Hamiltonian has exactly the same form as the old one – so the same physical laws apply!

But the speed of light is constant and finite in all directions.
Einstein postulates that:

- Any observer sees a constant, direction-independent light speed
- The same physical laws are observed in all inertial reference frames.

Then two clocks which "tick" at the same rate at rest will "tick" at the same rate when moving with velocity $v$.
By considering light bouncing in a box as a form of clock, we showed that:

- A moving clock "ticks" slower, $\Delta t_{\text{moving}} = \gamma \Delta t_{\text{rest}}$ with $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
- A moving object gets shorter along the axis of motion, $L' = L/\gamma$.

These are **Time dilation** and **length contraction**.

# 18: Frage: Lagrange I und Normalkraft

**F: Nachdem ich $\lambda$ rechnete, wie rechnete ich die Normalkraft?**
Betrachten Sie Lagrange I mit generalisierte Koordinaten $q_a$ und Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}, q) - V(q) - \lambda f(q)$$

Die Euler-Lagrangegleichung für Koordinat $q_a$ ist:

$$\frac{d}{dt} p_a = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{\partial T}{\partial q_a} - \frac{\partial V}{\partial q_a} - \lambda \frac{\partial f(q)}{\partial q_a}$$

Vorlesung 9 Folie 4: Der RHS nennen wir die generalisierte Kraft.
Die "generalisierte" Normalkraft ist

$$\frac{d}{dt} p_a = ... - \lambda \frac{\partial f(q)}{\partial q_a} .$$

Wenn $Q_a$ die ursprungliche kartesische Koordinaten sind, ist

$$\frac{d}{dt} P_a = (...) - \lambda \sum_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \frac{\partial f(q)}{\partial q_b} \;\Leftarrow\; \text{Normalkraft}$$