Theoretische Physik I:

Vorlesung 22: Gleichzeitigkeit

Letztes Mal: Zeitdilatation + Längekontraktion.

Dieses Mal: Wie sind die mit einander konsistent?

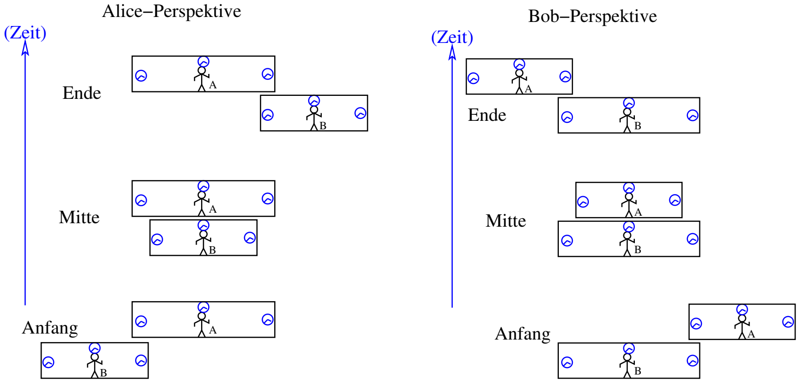
Betrachten Sie 2 Beobachter A (Alice) und B (Bob).
Bob bewegt sich mit Geschwindigkeit $v\hat{e}_x$ (in Alices Perspektive).
Alice bewegt sich mit Geschwindigkeit $-v\hat{e}_x$ (in Bobs Perspektive).
Jeder hat eine Uhr und ein Maßband, Länge L.
Letztes Mal haben wir gelernt:

- In Alices Perspektive tickt Bobs Uhr zu langsam: ein Tick dauert $\gamma\Delta t$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
- Alice sagt auch, dass Bobs Maßband eine Länge L/γ hat.
- Im Gegenteil findet Bob, dass Alices Uhr $\gamma\Delta t$ pro “Tick” braucht und Alices Maßband eine Länge L/γ hat.

Heute sehen wir, wie das alles konsistent ist:
Relativität der Gleichzeitigkeit

2: Alice und Bob

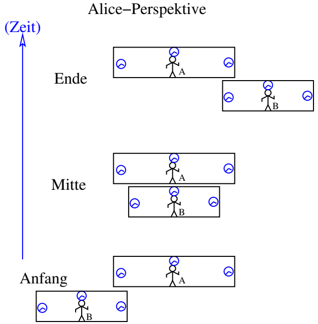
Alice und Bob setzen sich mitten in zwei Bahnwagen.
Wenn die Wagen nebeneinander sitzen, haben sie Länge L.
Aber jetzt fliegen sie aneinander vorbei, mit Relativgeschwindigkeit v



(Die blauen Kreise sind Uhren.) Wie sind diese zwei Perspektiven miteinander verträglich?

3: Die Uhren

Woher weiß Alice, dass Bobs Zug kürzer und seine Uhr langsamer ist?

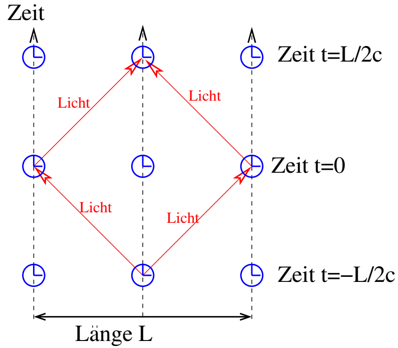


Bobs Wagen ist kürzer, weil die Rückseite an der Rückseite von Alices Wagen vorbeifährt, bevor die Vorderseite an der Vorderseite von Alices Wagen vorbeifährt.
Alice weiß, dass Bobs Uhr langsamer ist, weil es t Sekunden braucht, von dem Moment, wenn Bobs Uhr an der Rückseite des Zuges vorbei fährt, bis zu dem Moment, wenn sie die Vorderseite des Zuges passiert. Aber Bobs Uhr geht nur t/γ Sekunden in diesem Zeitraum voran.

Aber um alles zu messen, braucht Alice 3 Uhren: eine hinten im Wagen, eine vorne, und eine in der Mitte.
Und diese 3 Uhren müssen korrekt synchronisiert (abgestimmt) sein.

4: Uhren synchronisieren

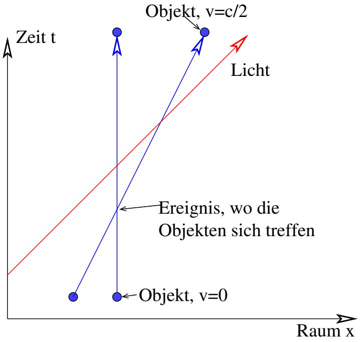
Wie kann Alice ihre Uhren synchronisieren? Mit Licht, natürlich!



Alices Uhr lässt einen Lichtblitz los.
In der Zeit $\Delta t = L/2c$ erreicht es die zwei Uhren, vorne und hinten.
In diesem Moment werden die zwei Uhren auf Zeit $t = 0$ gestellt.
Jede Uhr schickt einen Lichtblitz zurück.
Diese Blitze kommen zum Zeitpunkt $t = L/2c$ bei der mittleren Uhr an.
Die Gesamtzeit ist $\Delta t = L/c$.
Dadurch habe ich auch L gemessen, und weiß ich, dass ich die mittlere Uhr auf die Zeit $t = L/2c$ stellen muss.

5: Minkowski-Diagramm

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Um dies genauer zu erklären, führen wir das Minkowski-Diagramm ein.

Ein Diagramm zeigt eine Zeitgeschichte. Jeder Punkt ist ein Punkt im Raum und ein Moment in der Zeit – ein Ereignis.

Zeit verläuft vertikal, der Raum (wir werden nur die x-Richtung betrachten) ist die horizontale Achse.

Die Bewegung eines Objekts mit der Zeit wird im Diagramm zu einer Linie oder Kurve.

Ein Objekt mit $v = 0$ ist eine vertikale Linie.

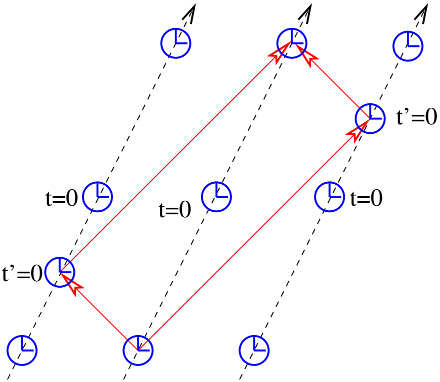
Die Steigung einer Linie beträgt $1/v$. Daher bewegt sich Licht entlang diagonaler Linien.

Ich werde auch ct statt t benutzen, sodass x und ct die gleiche Einheiten haben.
Die Steigung einer Lichtlinie ist deshalb 1, eine andere Linie ist $c/v \equiv 1/\beta$.
Die letzten zwei Folien haben Minkowski-Diagramme schon benutzt!

6: Bob synchronisiert seine Uhren

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Bob muss ein ähnliches System benutzen, um seine Uhren zu synchronisieren. Alice schaut zu, als Bob seine Uhren synchronisiert:



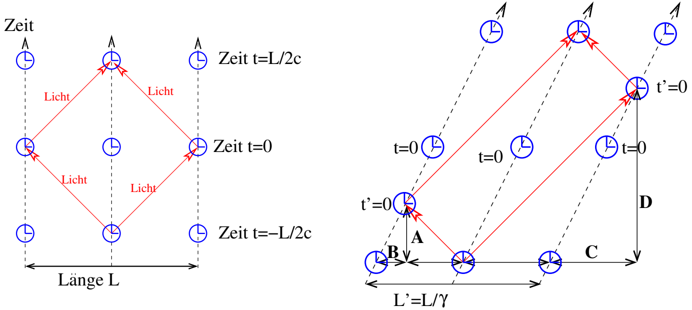
Von Alices Perspektive stellt Bob die Uhr am hinteren Ende des Wagens zu früh auf $t' = 0$, und die am vorderen Ende wird zu spät gestellt. Ereignisse, die Bob als gleichzeitig betrachtet, sind aus der Sicht von Alice nicht gleichzeitig. Und umgekehrt.

Relativität der Gleichzeitigkeit

7: Bob, ein bisschen genauer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten Sie wieder wie Bob seine Uhren synchronisiert: $\beta = v/c$, $t \to ct$



Wir finden schnell:

$$D = C + L'/2$$
$$C = \beta D$$
$$A = -B + L'/2$$
$$B = \beta A$$

$$D = t_+ = \frac{L'}{2(1-\beta)}\,, \quad A = t_- = \frac{L'}{2(1+\beta)}\,, \quad \text{mit } L' = L/\gamma = L\sqrt{1-\beta^2}$$

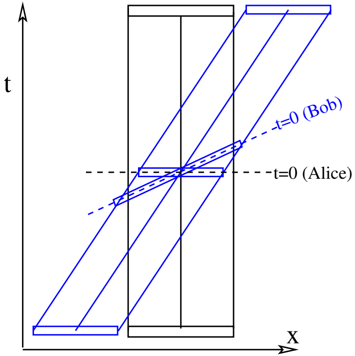
$$\Delta t = t_+ - t_- = \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta)} - \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{2(1+\beta)} = \frac{\beta L\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \beta\gamma L$$

Deshalb ist $t_A = \gamma t_B + \beta\gamma x_B$.

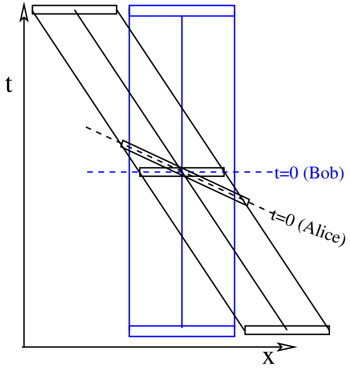
8: Alice und Bob und Minkowski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Minkowski Diagramm
Alices Perspektive

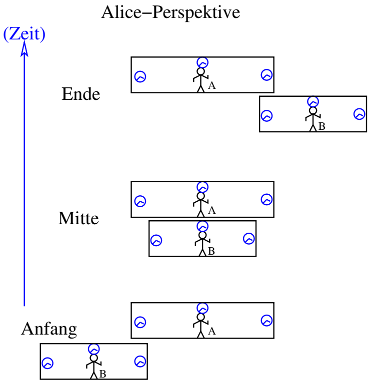


Minkowski Diagramm
Bobs Perspektive



In jeder Perspektive ist der andere Wagen kürzer.
Aber jeder kann die andere Perspektive verstehen.

Wenn Alice und Bob beide Bezugssysteme benutzen, mit dem gleichen Ursprung $(t_A, x_A) = (0, 0) = (t_B, x_B)$, was ist die Beziehung zwischen den Koordinaten (und Zeit) in Alices Bezugssystem und in Bobs Bezugssystem?



$$x_B = \gamma x_A - \gamma v t_A$$

$$t_B = \gamma t_A - \frac{\gamma v}{c^2} x_A$$

$$x_A = \gamma x_B + \gamma v t_B$$

$$t_A = \gamma t_B + \frac{\gamma v}{c^2} x_B$$

- γx_A: **Längekontraktion**
- γt_A: **Zeitdilatation**
- $-\gamma v t_A$: Galilei + Zeitdilatation
- $-\gamma v/c^2 x_A$: **Relativität der Gleichzeitigkeit**

10: Lorentz-Transformation in Matrix Form

Wir können dies als Matrizen schreiben:

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ct_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix}$$

Wir benutzen ct, weil es die gleichen Einheiten wie x hat.
Wir schreiben auch $\beta \equiv v/c$ – die einheitlose Geschwindigkeit.
Sind diese konsistent? Wir fügen die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hier benutzen wir $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$, so $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. Ja, die Matrizen sind invers.
Diese Koordinatentransformation zwischen (ct_B, x_B) und (ct_A, x_A) heißt **Lorentz-Transformation**.

11: Alle 4 Koordinaten

Und die y, z Koordinaten? Wirklich hätte ich

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$

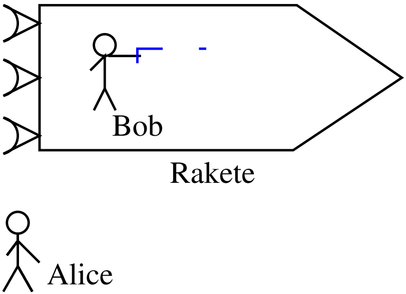
schreiben sollen. (y, z) spielen eine passive Rolle: $y_A = y_B$ und $z_A = z_B$.
Es gibt eine relativistische Indexnotation: Wir schreiben

$$x_A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_B^\nu \,, \qquad x_A^\mu = \begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} , \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hier ist $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Obere Indizes sind Spaltenindizes, untere Indizes sind Zeilenindizes.
Griechische Indizes laufen über Raumzeitrichtungen $\mu = 0, 1, 2, 3$,
Römische Indizes laufen über Raumrichtungen $i = 1, 2, 3$.

12: Warum kann v nicht $> c$ sein?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Wie ich $v > c$ erreichen möchte:
Eine Rakete bauen, die $v = 2c/3$ erreichen kann
Bob sitzt in der Rakete.
Bob hat eine elektromagnetische Schienenkanone
Diese feuert ein Geschoss mit der Geschwindigkeit $v' = 2c/3$ ab.
Und $2c/3 + 2c/3 = 4c/3$, oder?

Das müssen wir sorgfältig abwägen.
In Bobs Perspektive hat das Geschoss Geschwindigkeit $v = +2c/3$. Bobs Geschwindigkeit = 0, Alices Geschwindigkeit = $-2c/3$.

13: Addition der Geschwindigkeiten

Was bedeutet es, dass das Geschoss eine Geschwindigkeit $v = 2c/3$ hat? Wenn das Geschoss am Ereignis ($t_B = 0, x_B = 0$) geschossen wird, ist danach $x_{\text{Geschoss}} = (2/3)ct_B$. Auf Zeit t ist $x = 2ct/3$, und $v = x/t = 2c/3$. Das ist in Bobs Perspektive. In Alices Perspektive?

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \frac{2ct}{3} \end{bmatrix}$$

Hier ist $\beta = 2/3$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-4/9} = 3/\sqrt{5}$:

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \frac{2ct}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3\sqrt{5}}ct \\ \frac{12}{3\sqrt{5}}ct \end{bmatrix}$$

und die Geschwindigkeit, die Alice misst, ist $v = x_A/t_A = 12c/13$.
Langsamer als c.

14: Addition der Geschwindigkeiten

Am einfachsten gehen wir von der Geschoss-Perspektive zu der Bob-Perspektive zu der Alice-Perspektive. Wenn die Relativgeschwindigkeiten v_2 und v_1 sind, finden wir die Lorentz-Transformation:

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_2\beta_2 \\ \gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_G \\ x_G \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2\,(1+\beta_1\beta_2) & \gamma_1\gamma_2\,(\beta_1+\beta_2) \\ \gamma_1\gamma_2\,(\beta_1+\beta_2) & \gamma_1\gamma_2\,(1+\beta_1\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_G \\ x_G \end{bmatrix}$$

Das ist eine Lorentz-Transformation mit

$$\beta = \frac{\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2)}{\gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad \text{oder} \quad v_{\text{tot}} = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$$

Solange $|v_1| < c$ und $|v_2| < c$ ist $|v_{\text{tot}}| < c$.
Man kann auch bestimmen, dass der γ-Faktor für diese Geschwindigkeit $\gamma_{\text{tot}} = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$ ist.

15: English summary

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Space and time are measured, and the speed of light enters into our measurements.
When we synchronize clocks at different positions, we must use something, such as light, to transfer timing information. This procedure looks "wrong" in another reference frame. Therefore the notion of simultaneity is reference frame dependent. This combines with the effects from last week to give us the

Lorentz Transform:

$$\begin{bmatrix} ct_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$

Multiplying two Lorentz transformations, we find that velocities $\beta = v/c$ add as follows:

$$\beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} .$$

This combination can never exceed the speed of light, provided $|\beta_1| < 1$ and $|\beta_2| < 1$.