Theoretische Physik I:

Vorlesung 23: Relativität, Minkowski-Diagramme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir haben Spezielle Relativität jetzt gesehen:

- **Zeitdilatation, Längenkontraktion, Relativität der Gleichzeitigkeit**
- Lorentz-Transformation: die 3 zusammen
- Physikalisches Bild: Minkowski-Diagramm

Heute diskutieren wir Lorentz-Transformationen und Minkowski-Diagramme weiter. Konkret wollen wir eine Intuition für Lorentz-Transformationen entwickeln, indem wir mehr über Minkowski-Diagramme nachdenken und die Lorentz-Transformation mit Rotationen vergleichen.

Wir wollen auch ein paar klassische relativistische "Paradoxa" diskutieren: **Zwillingsparadoxon** und **Paradoxon der Längenkontraktion** (in den Übungen)

2: Lorentz Transformation und Rotation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine Lorentz-Transformation entlang der x-Achse mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$ ist:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Hier sind (ct', x', y', z') die neuen Koordinaten und Zeit, (ct, x, y, z) die alten Koordinaten und Zeit, und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

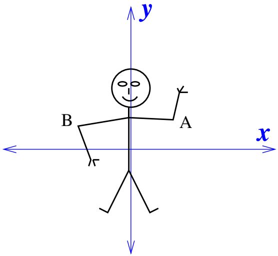
Eine Rotation (Drehung) um die z-Achse mit Winkel θ ist:

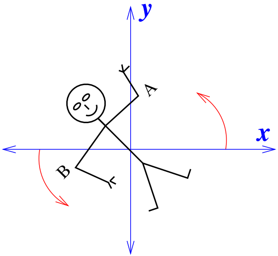
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Die beiden sind sich ähnlich: eine Matrix-Multiplikation, die zwei Koordinaten vermischt. γ, $\beta\gamma$ spielen die Rolle von $\cos(\theta), \sin(\theta)$. Die Lorentz-Transformation hat aber keine $-$-Zeichen. Wir sollten diese Ähnlichkeit weiter betrachten.

3: Aktive Rotationen

Eine **aktive Rotation** ist, wenn ich ein Objekt rotiere:





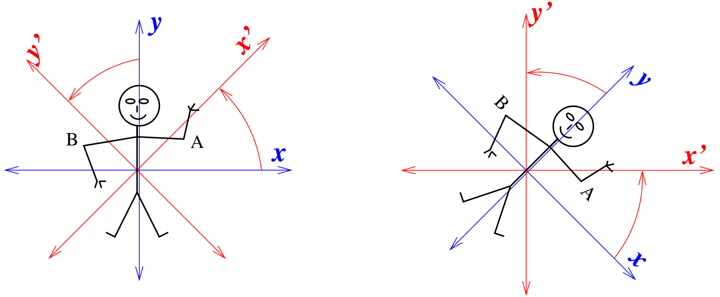
Rotation um 45° gegen den Uhrzeigersinn

Die neuen Koordinaten (x', y') sind:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4: Passive Rotation

Eine **passive Rotation** ist, wenn ich mein Koordinatensystem drehe:

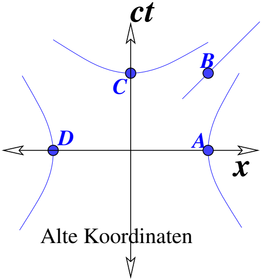


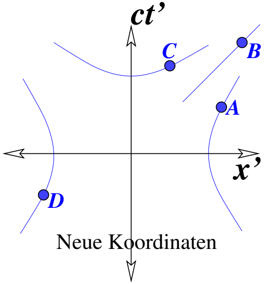
Ich schreibe neue *Koordinaten*, die 45° relativ zu den alten Koordinaten gedreht sind. Wenn ich alles in diesen Koordinaten zeichne, ist das Objekt in die entgegengesetzte Richtung gedreht worden:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Aktive und passive Rotationen sind *Umkehroperationen*.

5: Passive Lorentz-Transformation





Betrachten Sie 4 Punkte in Raumzeit (Ereignisraum). Ich transformiere in ein Bezugssystem, das mit der Relativgeschwindigkeit $-v$ in Bewegung ist:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

$A: \quad (0, x) \to (\beta\gamma x, \gamma x)$

$B: \quad (x, x) \to ((1+\beta)\gamma x, (1+\beta)\gamma x)$

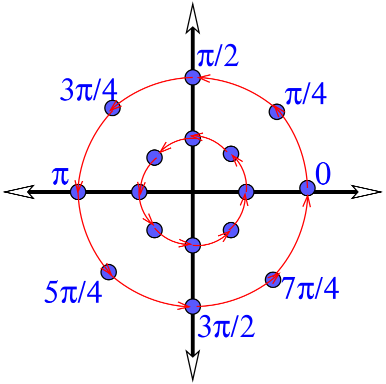
$C: \quad (x, 0) \to (\gamma x, \beta\gamma x)$

$D: \quad (0, -x) \to (-\beta\gamma x, -\gamma x)$

6: Rotation: Kreise

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Da der θ-Wert von 0 bis 2π variiert, welcher Kurve folgt ein Punkt?



Einem Kreis, natürlich!
Wie weiß ich das ganz genau?

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))^2 + (-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))^2 \\ &= x^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + y^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &+ 2xy(\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta)) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Aber $x^2 + y^2 = R^2 = (x')^2 + (y')^2$ ist ein Kreis.

7: Zwei Rotationen

Betrachten Sie eine Rotation mit Winkel θ_1, danach eine Rotation mit Winkel θ_2:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1}$$

und Winkeln sind additiv.

8: Lorentz Transform: Was bleibt gleich?

Bei einer Lorentz-Transformation ändert sich $x^2 + c^2t^2$:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

$$(x')^2 + (ct')^2 = \frac{x^2 + c^2t^2 + 2\beta^2 xct}{1 - \beta^2}$$

Aber interessanterweise ändert sich $x^2 - c^2t^2$ nicht:

$$\begin{aligned} (x')^2 - (ct')^2 &= \gamma^2(x + \beta ct)^2 - \gamma^2(\beta x + ct)^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(x^2 - c^2t^2) \\ &= x^2 - c^2t^2 \end{aligned}$$

Hier benutzen wir $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$.

9: Lorentz Transform: Hyperbel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\text{Letzte Folie:} \qquad (x')^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

Für welche Kurve bleibt $x^2 - (ct)^2$ (oder $x^2 - y^2$) gleich?
Ein Hyperbel! $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \to (\cosh(\theta), \sinh(\theta))$???

Wir nennen $\theta \equiv \mathrm{arctanh}(\beta) = \mathrm{arcsinh}(\beta\gamma)$ und finden:

$$\gamma = \cosh(\theta)\,, \quad \beta\gamma = \sinh(\theta)\,, \quad \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}.$$

Den “Winkel” θ nennen wir **Rapidität**.

10: Addition der Geschwindigkeiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Raumzeit Rapiditäten sind additiv:

$$\begin{bmatrix} \cosh(\theta_1) & \sinh(\theta_1) \\ \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\theta_2) & \sinh(\theta_2) \\ \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1)\sinh(\theta_2) & \sinh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \cosh(\theta_1)\sinh(\theta_2) \\ \sinh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \cosh(\theta_1)\sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1)\sinh(\theta_2) \end{bmatrix}$$

Aber
$$\cosh(\theta_1 + \theta_2) = \cosh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1)\sinh(\theta_2)$$
$$\sinh(\theta_1 + \theta_2) = \cosh(\theta_1)\sinh(\theta_2) + \sinh(\theta_1)\cosh(\theta_2)$$

und deshalb

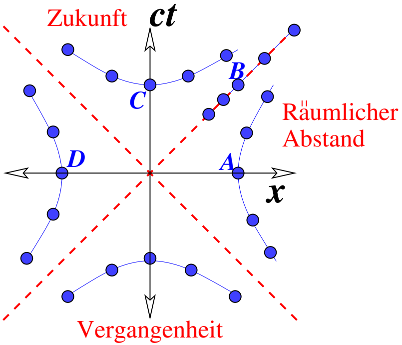
$$\begin{bmatrix} \cosh(\theta_1) & \sinh(\theta_1) \\ \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\theta_2) & \sinh(\theta_2) \\ \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta_1 + \theta_2) & \sinh(\theta_1 + \theta_2) \\ \sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit ist $\beta = \tanh(\theta)$. Und

$$\beta_{\text{tot}} = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh(\theta_1) + \tanh(\theta_2)}{1 + \tanh(\theta_1)\tanh(\theta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$ Addition der Geschwindigkeiten!

11: Raumzeit Regionen

Betrachten Sie ein Ereignis um $(ct, x) = (0, 0)$. Andere Ereignisse haben Raumzeit-Koordinaten (ct, x).



Raumzeit teilt sich in 3 Regionen:

- Punkte mit $t < 0$ und $c^2t^2 - x^2 > 0$: **Die Vergangenheit**
- Punkte mit $x^2 - c^2t^2 > 0$: Punkte mit **räumlichem Abstand** von $(0, 0)$
- Punkte mit $t > 0$ und $c^2t^2 - x^2 > 0$: **Die Zukunft**

12: Abstand, Zukunft und Vergangenheit

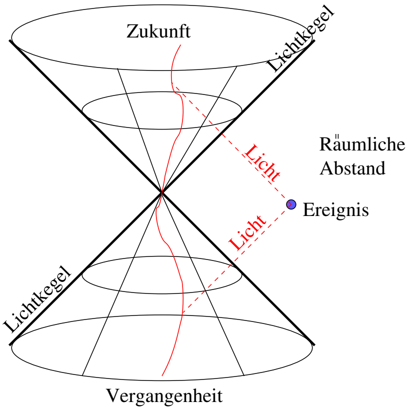
Alle Beobachter in allen Bezugssystemen sind sich darüber einig, welche Ereignisse in welchen Regionen liegen. Aber:

- Für jedes Ereignis in die Zukunft (bzw. Vergangenheit) gibt es ein Bezugssystem, wobei das Ereignis auf $x = 0$ ist. Alle Beobachter sind sich einig, dass $t > 0$ (bzw. $t < 0$) ist, aber sie sind nicht über die räumliche Trennung einig.
- Für jedes Ereignis mit räumlichem Abstand gibt es ein Bezugssystem, wobei das Ereignis auf $t = 0$ ist (d.h., ist gleichzeitig). Alle Beobachter sind sich einig, dass $|x| > 0$ ist, aber sie sind nicht über die Zeichen der Zeit einig.
- Es gibt auch Ereignisse, wobei $x^2 - c^2 t^2 = 0$ ist (die roten Linien). Diese sind **lichtartig voneinander getrennt.** Licht kann auf diesen Linien zu oder von unserem Punkt reisen.

Wenn wir von (x, y, z) und nicht nur x sprechen, sind die Hyperbeln durch Hyperboloide ersetzt. Die in der Vergangenheit und Zukunft sind zweischalige Hyperboloide, die mit räumlichem Abstand sind einschalige Hyperboloide. Die lichtartigen Linien sind Kegeln (die Lichtkegeln).

13: Lichtkegel und räumlicher Abstand

Was passiert auf dem Lichtkegel? Und stimmt es, das räumlich getrennte Ereignisse nicht erreichbar sind?



Ich habe 2 Lichtkegel: die Grenze zwischen meiner Zukunft und der Region von räumlichem Abstand, und die Grenze zwischen meiner Vergangenheit und der Region von räumlichem Abstand.
Ich bin jetzt ein Ereignis.
Ich komme aus der Vergangenheit und gehe in die Zukunft (rote Linie). Weil ich Masse habe, kann ich den Lichtkegel in der Zukunft nicht erreichen. Aber wenn ich jetzt ein Licht anstrahle, wird sich das Licht entlang des Lichtkegels ausbreiten.

Bei räumlichem Abstand kann ich ein Ereignis weder erreichen noch mit ihm kommunizieren oder beeinflussen. Das Ereignis empfängt Licht, das ich in der Vergangenheit gesendet habe, und wenn es Licht sendet, werde ich es in der Zukunft empfangen.

14: Zwilling-Paradoxon

Zwillinge sind 20 Jahre alt. Einer will das Abenteuer, der Andere will Ruhe.
Der abenteuerlustige Zwilling fliegt in einem Raumschiff zu einem 20 Lichtjahre entfernten Stern, eine Reise, die im Bezugssystem der Erde 25 Jahre dauert.
Dann dreht er um und kommt zurück, was weitere 25 Jahre dauert.
Als er zurück kommt, ist der Zwilling, der auf der Erde geblieben ist, 70 Jahre alt.
Aber der, der im Raumschiff geflogen ist, ist nur 50 Jahre alt. Warum?

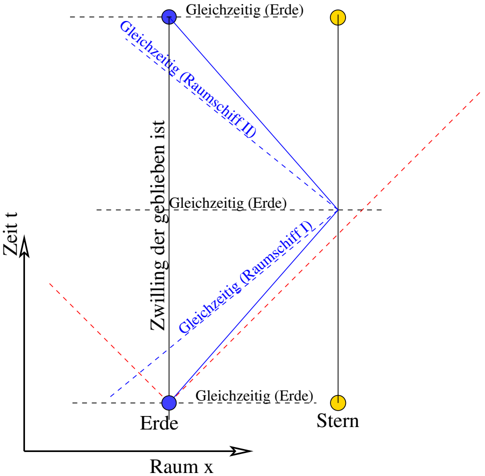
- Sagt der Zwilling, der auf der Erde geblieben ist: “Natürlich. Du bist so schnell geflogen, dass deine Uhr langsamer gelaufen ist. $\gamma = 1/\sqrt{1-(20/25)^2} = 5/3$. Deshalb waren 25 Jahre auf der Erde nur $25/\gamma = 15$ Jahre für dich. Ich habe $25 + 25 = 50$ Jahre gelebt, aber du hast nur $15 + 15 = 30$ Jahren gelebt.”
- Sagt der Astronaut: “Nein. Aus meiner Sicht bist du 15 Jahre lang von mir weggeflogen und dann 15 Jahre lang auf mich zugeflogen. Du hättest nur $9 + 9 = 18$ Jahren erleben sollen.”

Warum hat der Astronaut nicht recht?

15: Zwilling-Paradoxon Minkowski Diagramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Zwilling im Raumschiff hat sein Bezugssystem geändert!



Hier ist das Minkoswki-Diagramm. Die Erde und der Stern bleiben still (vertikal). Das Raumschiff geht nach rechts, dann nach links. Auf der Hinreise hat das Raumschiff eine Perspektive der Gleichzeitigkeit. Die Menge der gleichzeitig betrachteten Punkte wird gezeigt. Auf der Rückreise hat das Raumschiff jedoch ein anderes Bezugssystem. Die Menge der gleichzeitig betrachteten Punkte wird auch gezeigt.

Die 32 Jahre Zeitunterschied liegen zwischen diesen beiden gepunkteten Linien.

16: Summary in English

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

We noted the similarities between Lorentz transformations and rotations. We also explained the difference between an active transformation (rotating objects) and a passive transformation (rotating the coordinates). They are inverses.

While a series of rotations carries a point around in a circle, a series of Lorentz transforms moves a point along a hyperbola. For the circle, $x^2 + y^2$ is constant. For the hyperbola, $x^2 - (ct)^2$ is constant:

- If $x^2 > c^2t^2$ an event is in the spacelike region. Not all observers agree whether $t > 0$, $t < 0$, or $t = 0$, but $|x| \neq 0$.
- If $c^2t^2 > x^2$ and $t > 0$ then the event is in the timelike future region. Some observer finds $x = 0$; all observers find $t > 0$.
- If $c^2t^2 > x^2$ and $t < 0$ then the event is in the timelike past region. Again, for some observer $x = 0$, but for all, $t < 0$.
- If $c^2t^2 = x^2$ then the event is on the light cone.

The Twin Paradox is fun. The lesson is that if you change frame of reference, you should be careful; your idea of simultaneity shifts at the same time.

17: Frage: Uhren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Frage: Uhren wieder: ein Uhr mit licht im y-Richtung läuft langsam. Warum sollen aber *alle* Uhren auch langsam laufen?

Antwort: Alice und Bob sind in 2 Raketen, neben einander, und haben jeder 5 Uhren.
Zwei funktionieren mit Licht und Spiegeln und die Länge L: die Länge L ist genau so lang wie 100.000.000 Siliziumatomen.
Ein Uhr funktioniert mit Fäden und Händen wie normale Uhren.
Ein funktioniert mit Atomen (ugf. wie schnell läuft ein Elektron ein Atom um?)
Ein funktioniert mit Quartz-Kristallen und ...

Alice und Bob sitzen neben einander und prüfen, dass alle 10 Uhren laufen genau so schnell wie einander.
Dann schlafen Alice und Bob. Als sie schlafen, beschleunigt eine Rakete – erst nach hinten, haltet, dann nach vorne. Als sie aufwachen, bemerkt jeder, dass ihre/seine 5 Uhren nicht kaput gegangen sind, und immer noch genau so schnell wie einander laufen. Jeder schaut an als die/der andere vorbei fliegt.

18: Weiter...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Weil jeder sieht, dass ihre/seine eigene Uhren genau so schnell wie einander laufen, must jeder sehen, dass die andere 5 Uhren genau so schnell wie einander laufen.

Wir haben schon gesehen, dass eine Uhr mit Licht in der y-Richtung langsamer läuft, wenn sie mit Geschwindigkeit v fliegt: $T' = T/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Weil die andere 4 Uhren genau so schnell wie diese Uhr sich ticken, müssen sie auch langsamer laufen. Atomphysik, Physik der Federn und Massen, Quartz-Kristallen, usw. müssen alle auch genau so funktionieren, dass diese Uhren auch langsamer sind ...

Wir wissen immer noch nicht, welcher (Alice oder Bob) sich bewegt. Das ist nicht relevant!

19: Blitzer, Doppler-Effekt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Frage: Meine Frage geht um die Relativität des Lichts: Ich hab mich gefragt, wenn mich ein Blitzer (Radarfalle) mit meinem Auto erwischt, weil ich zu schnell war, kann seine Messung doch falsch sein, da dieser ja mit dem Doppler-Effekt arbeitet. Wir haben in der Vorlesung das Beispiel mit Alice und Bob gehabt, wo wir gesehen haben, dass die Längenkontraktion unterschiedliche Ergebnisse erzeugt, wenn eins der beiden Systeme sich bewegt. Ist somit nicht dann jeder Blitzer ungenau?

Antwort: Erst: Doppler-Effekt (nächste Folie):

$$f_{\text{gemessen}} = f_{\text{emittiert}}\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \quad \text{oder} \quad f_{\text{emittiert}}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

Wenn ich weg vom Blitzer fahre, sehe ich eine Frequenz $f = f_{\text{em}}\sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)}$.
Meine Perspektive: ich emittiere die gleiche Frequenz.
Blitzer: sieht $f_{\text{ges.}} = f\sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)} = f_{\text{em}}(c-v)/(c+v)$
Hier ist v die Geschwindigkeitsunterschied zwischen Auto und Blitzer.
Absolute Geschwindigkeit ist unmessbar. Was straffbar ist, ist eine hohe Geschwindigkeit im Vergleich zu einem Blitzer zu haben.

21: Eigenwerten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Frage: Was haben die Eigenwerten/vektoren der $T^{-1}V$ Matrix mit Eigenfrequenzen und Schwingungensmuster?

Betrachten Sie N Massen mit Koordinaten $x_1, \dots, x_N$, Lagrangefunktion

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2}\dot{x}_i T_{ij} \dot{x}_j - \frac{1}{2} x_i V_{ij} x_j \, .$$

Wenn

$$T_{ij}^{-1} V_{jk} \xi_{a,k} = \lambda_a \chi_{a,i}$$

dann ist die Schwingungsfrequenz $\omega_a = \sqrt{\lambda_a}$. Die Entfernung (Amplitude), die jede Masse zurücklegt, wird durch den Werd der ξ_a-Komponente bestimmt. Das heißt, x_i bewigt sich im Verhältnis zum $\xi_{a,i}$.
Deshalb sagt $\xi_{a,i}$ die relativ Weite (und Zeichen) von jeder Masse.

22: Nächste Woche Dienstag

26 Vorlesungen, aber nur 24 davon sind Klausurrelevant.
Keine Hausübung über die letzte 2 Vorlesungen.
Vorlesung 26 (Donnerstag): Zusammenfassung und Fragen
Vorlesung 25: Freie Wahl:

- Mehr über Wellen
- Stabilität und Bifurkationen
- Nicht-lineare Schwingungen
- Hamilton-Jacobi Theorie
- Vorschau auf die Allgemeine Relativitätstheorie

Fragenbogen vom Homepage gelinkt....