Theoretische Physik I:

Vorlesung 24: Relativität, Lagrange, Hamilton

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

In den letzten 3 Vorlesungen haben wir *nur Bezugssysteme* in Relativität diskutiert.
Aber das lässt viele Themen unbeantwortet.
Was ist Energie? Impuls? Was sind die Bewegungsgleichungen?
Um dies zu beantworten, brauchen wir die Lagrangefunktion und/oder Hamilton-Funktion eines relativistischen Systems.

- Ein Konzept brauchen wir zuerst: **Eigenzeit**
- Damit schreiben wir die Wirkung und Lagrangefunktion
- Davon finden wir den kanonischen Impuls und die Hamilton-Funktion
- Danach werden wir die relativistischen Ausdrücke für die Energie und den Impuls lernen. Dazu gehört auch das berühmte Ergebnis von Einstein: $E = mc^2$.

2: Myonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ich fange mit einem Umweg an: das Leben des Myons.

Ein Myon ist ein Elementarteilchen, das mit einer Lebensdauer von 2×10^{-6} Sekunden zerfällt.[1]

Aber wenn ich die Myonen in einen Beschleunigerring setze und sie bei $\beta = 0.995$ ($\gamma = 10$) zirkulieren lasse, ist ihre Lebensdauer 20×10^{-6} Sekunden – 10 = γ mal länger.

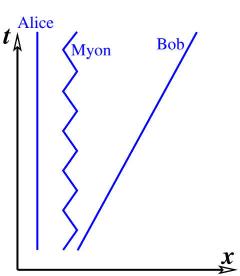
Warum? *Weil die Myonen eine kürzere Zeit erfahren*: $\Delta t_{\text{Myon}} = \Delta t/\gamma$.
Sind wir sicher? Wir haben das bei konstanter Relativbewegung gesehen, aber das Myon beschleunigt sich.

[1] Lebensdauer ist ein Durchschnittswert. Wenn ich mit N Myonen beginne, zerfällt jede Nanosekunde $1/2000$ der verbleibenden Myonen – oder jedes verbleibende Myon zerfällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2000.

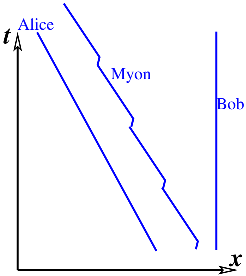
3: Zeit und komplexe Bewegung

Betrachten Sie Alice und Bob und Myon.

- In Alices Bezugssystem bewegt sich Bob mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$
- In Alices Bezugssystem macht das Myon eine Hin-und-Her-Bewegung mit der Geschwindigkeit $\pm v'$.



Alice Bezugssystem



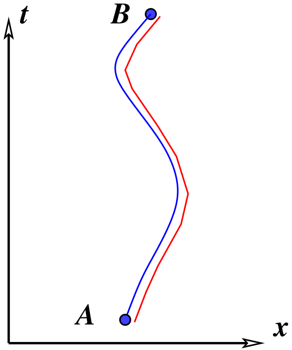
Bob Bezugssystem

Was sieht Bob? Die Hin-Bewegungen sind kurzer und mit kleiner Geschwindigkeit, die Her-Bewegungen sind länger und mit hoher Geschwindigkeit.
Aber wenn Bob und Alice jeweils die Zeit berechnen, die das Myon in einer Hin-und-Her-Bewegung erfahren sollte, werden sie die gleiche verstrichene Zeit finden.

4: Eigenzeit I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wenn ein Myon (oder ich, oder etwas) eine komplexe Bewegung erlebt, wie viel Zeit erlebt das Myon?



Wenn ich bei Ereignis A beginne und bei Ereignis B ende, kann ich meine Raumzeit-Bahn als eine Reihe von kurzen Schritten annähern: von $(ct_0, x_0) = A$ bis (ct_1, x_1) bis (ct_2, x_2) bis ... bis $(ct_N, x_N) = B$.
Die Zeit, die ich erlebe, wenn ich von (ct_1, x_1) nach (ct_2, x_2) gehe, ist

$$\Delta ct = (ct_2 - ct_1)/\gamma = (ct_2 - ct_1)\sqrt{1-\beta^2}$$

$$(\Delta ct)^2 = (ct_2 - ct_1)^2(1-\beta^2)$$

$$= (ct_2 - ct_1)^2\left(1 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2/(ct_2 - ct_1)^2\right)$$

$$(\Delta ct)^2 = \left((ct_2 - ct_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2\right)$$

Aber $(ct_2 - ct_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$ ist gleich in allen Bezugssystemen!

5: Eigenzeit II

Für eine kurze Teil der Weg ist die erlebene Zeit:

$$\Delta ct_{1\to 2} = \sqrt{(ct_2 - ct_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2}\,.$$

Diese Kombination is gleich in alle Bezugssysteme.
Die Gesamtzeit ist ein Integral über alle solche kleine Schnitte:

$$\tau = \int_A^B \sqrt{dt^2 - dx^2/c^2} = \int_A^B dt\sqrt{1-\beta^2}$$

Wenn ich auf Ereignis *A* anfange, nach Ereignis *B* ende, und den gleichen (physikalischen) Pfad folge, ist diese Integral Bezugssystemunabhängig.
Man nennt sie die **Eigenzeit**.

6: Relativistische Wirkung

In der Mechanik folgt alles aus der Wirkung

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt \, .$$

Die Wirkung ist eine Eigenschaft des Gesamtsystems und muss in allen Bezugssystemen gleich sein.

Betrachten Sie ein System mit einem Teilchen.
Wenn es bei Ereignis *A* anfängt und irgendeiner Bahn zum Ereignis *B* folgt, ist die einzige Größe, die in allen Bezugssystemen gleich ist, die Eigenzeit!

$$S = -K \int_A^B \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \qquad \text{oder} \qquad L(x, \dot{x}) = -K \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}$$

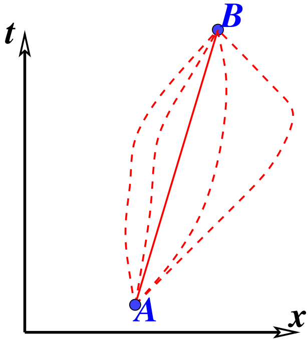
wobei *K* eine Konstante ist.

K hat die gleichen Einheiten wie Energie. Wir werden $K = mc^2$ schreiben, wobei *m* eine Konstante ist, die die gleichen Einheiten wie die Masse hat.

7: Warum $S \propto \tau$?

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Warum soll $S \propto \tau$ die Eigenzeit sein?
S soll für alle Beobachter gleich sein, dass die relativistische Invarianz automatisch erfüllt ist.



Betrachten Sie 2 Ereignisse. Eine Bahn minimiert

$$S = -mc^2 \int_A^B \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

namentlich die gerade Bahn $\vec{v} = (\vec{x}_B - \vec{x}_a)/(t_B - t_A)$. Alle anderen möglichen Bahnen haben kürzere Eigenzeiten.

Die gerade Bahn ist richtig, weil wir noch keine potentielle Energie haben.

$$L(x, \dot{x}) = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \ldots = (\text{Konst}) + \text{Standardwert} + \ldots$$

8: Kanonischer Impuls

Unsere Lagrangefunktion ist (wirklich nur der kinetische Teil davon – Heute sprechen wir nicht von Potentialenergie in Relativitätstheorie):

$$L(x, \dot{x}) = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}\,.$$

Der kanonische Impuls folgt:

$$\vec{p} = \frac{\partial L(x, \dot{\vec{x}})}{\partial \dot{\vec{x}}} = mc^2 \frac{\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v}\,.$$

Dies unterscheidet sich von der nicht-relativistischen Form um einen Faktor von γ. Bei kleinen Geschwindigkeiten können wir eine Taylorreihe in $v^2/c^2 \ll 1$ rechnen:

$$\vec{p} \simeq m\vec{v} + \frac{m\vec{v}(\vec{v})^2}{2c^2} + ...$$

9: Hamilton-Funktion

Mit $L(\vec{x},\vec{v}) = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ und $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ in der Hand, kann ich die Legendre-Transformation machen:

$$\begin{aligned} H(\vec{p},\vec{x}) &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(v^2+c^2-v^2\right) \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \end{aligned}$$

Wir können eine Taylorreihe daraus berechnen:

$$H = E = mc^2(1-v^2/c^2)^{-1/2} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + ...$$

$mv^2/2$ ist die übliche kinetische Energie. Aber mc^2??

10: Energie der Masse

Für ein ruhendes Teilchen, $E = mc^2$

Dies ist **die Energie der Masse**. Ja, diese Energie ist echt!
Der Wert ist extrem groß:

$$m = 70\,\text{kg} \;\Rightarrow\; mc^2 = 6.3 \times 10^{18}\,\text{J} = 1575\,\text{Megatonnen-TNT-Äquivalent}$$

Wenn in der Teilchenphysik ein Teilchen zerfällt, setzt es seine Massenenergie in Strahlung (oder anderen Tochterteilchen) frei. Glücklicherweise ist die Materie stabil; wir zerfallen nicht!
Antimaterie ist nicht nur Science-Fiction; es existiert tatsächlich. Wenn ein Antimaterienteilchen auf dasselbe Materienteilchen trifft, vernichten sie sich unter Freisetzung von $2mc^2$ Strahlung.
Aber Dan Brown (Illuminati) hat unrecht – wir können nur einige wenige Antimaterienteilchen herstellen, und wir können keine makroskopischen Mengen davon herstellen und in einer magnetischen Flasche oder einem anderen Gerät aufbewahren.

Chemie: Wenn ich 1kg Wasserstoff mit 8kg Sauerstoff verbrenne, setze ich 1.417×10^8 J Wärmeenergie frei.
Nachdem das Wasser abkühlt, hat es $\Delta m = \Delta E/c^2$ weniger Gewicht; es ist $(1.417 \times 10^8\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2)/c^2 = 1.57 \times 10^{-9}$ kg $= 1.57\mu g$ leichter als die Inhaltsstoffe waren. Dieser Unterschied ist zu gering,um ihn zu messen.

Kernphysik: Wenn 1kg Uran (^{238}U) in Thorium und Helium zerfällt, setzt es 1.74×10^{12}J Wärmeenergie frei.
Nachdem alles abkühlt, sind die Produkte
$1.74 \times 10^{12}\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2/c^2 = 1.93 \times 10^{-5}$ kg = 19.3 mg leichter. Dieser Unterschied kann und wurde gemessen.

Die Kernspaltung erzeugt etwa 40-mal so viel Energie wie dieses Zerfallsprodukt. Deshalb hat die Kernenergie ein solches Potenzial.

12: Hamilton-Funktion und p

Wir haben $H(x,p) = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ als Funktion von (x,v), nicht (x,p), geschrieben. Wir müssen es umschreiben:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2+p^2/c^2}}$$

$$H(x,p) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2+p^2/c^2}}}$$

$$H(x,p) = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} \qquad \text{oder}$$

$$E^2 = m^2c^4+p^2c^2$$

Wir können das als $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ umschreiben; die Kombination $E^2 - p^2c^2$ ist in allen Bezugssystemen gleich.

13: Energie, Impuls, Lorentz

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad \text{oder} \qquad m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$$

Sieht ähnlich aus, wie $c^2t^2 - x^2 = \tau^2$ quadrat der Eigenzeit.

Wir können auch P^μ einführen, mit $P^0 = E$, $P^1 = cp_x$, $P^2 = cp_y$, $P^3 = cp_z$.
Das Kombination $(\vec{P})^2 - (P^0)^2$ ist Bezugssystemunabhängig.
unter Lorentz-Transformationen ändert sich P^μ als $P^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$ oder

$$\begin{bmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{bmatrix}$$

14: Ist H eine Erhaltungsgröße?

Fast alles, was wir über Erhaltungsgrößen und Nöther'sche Theorem gelernt haben, ist in der relativistischen Theorie auch gültig. Solange $L(x, \dot{x}, t)$ keine explizite Zeitabhängigkeit hat, finden wir immer noch, dass H erhalten ist.

Mit Hilfe des Nöther'schen Theorem konnten wir zeigen, dass die drei Rotationssymmetrien die Erhaltung der drei Komponenten des Drehimpulses gewährleisten.
In ähnlicher Weise geben uns die drei Lorentz-Transformationssymmetrien (entlang der x, y, z Achsen) einen neuen konservierten Vektor!

$$c^2 t \vec{p}_{\text{gesamt}} - E_{\text{gesamt}} \vec{r}_s \qquad \text{ist eine Erhaltungsgröße!}$$

Leider kenne ich keinen Fall, wo das wichtig ist.

15: Was sind diese ...???

Wenn ein System wirklich relativistisch ist, soll ich den genauen Ausdruck der Hamilton-Funktion (oder der Lagrangefunktion) benutzen:

$$H(x,p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + V(x)\,, \qquad L(x,\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2} - V(x)\,.$$

Aber wenn ich weiß, dass v/c klein sein wird, kann ich eine Reihenentwicklung in kleinem v/c durchführen:

$$H(x,p) = V(x) + mc^2 + \frac{p^2}{2m} + A\frac{p^4}{m^3c^2} + ...$$

(Sie werden A in den Übungen rechnen.) Ap^4/m^3c^2 usw. geben relativistische Korrekturen an die nicht-relativistischen Bewegungsgleichungen. Wir werden sie in Theorie 2 weiter diskutieren, wenn wir über **Störungstheorie** sprechen.

16: Eigenbeschleunigung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Nur ein Kommentar: die Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

ist natürlich bezugssystemabhängig. Wir können die Eigenbeschleunigung definieren, d.h. die Beschleunigung, die in dem Bezugssystem beobachtet wird, in dem das Objekt (momentan) ruht.

Wenn ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ sich bewegt (in meinem Bezugssystem), und ich $dv_x/dt = a_x$ und $dv_y/dt = a_y$ messe, dann erfährt das Teilchen Beschleunigungen von $dv'_x/dt = \gamma^3 a_x$ und $dv'_y/dt = \gamma a_y$.

17: English summary

Proper time is the amount of time which an accelerating object observes to pass. If an object moves with $x = x(t)$ and $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, then the total proper time elapsed is

$$\tau = \int_A^B \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

Ignoring potential energies for the moment, the action and Lagrangian are

$$S = -mc^2\tau = \int_A^B -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\,, \qquad L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}\,.$$

The canonical momentum and Hamiltonian (energy) then follow:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mv\,, \qquad H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\,.$$

18: Summary II

The Hamiltonian, written in terms of the momentum p, is:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}\,.$$

When v/c or p/mc is small, we can expand the square root:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + ...$$

The second term is the familiar kinetic energy.
The leading term is the mass-energy, which is Einstein's celebrated result $E = mc^2$.
As long as the particle does not change its nature, this energy is not available, but in the case of, for instance, particle decay or annihilation, it can be measured or extracted.
We can combine $E, c\vec{p}$ into a 4-vector, and it transforms in exactly the same way as $ct, \vec{x}$ do.