

Theoretische Physik I:

Vorlesung 25: Vorschau an der Allgemeine Relativitätstheorie



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- ▶ Gravitative Masse, Trägheit, Äquivalenzprinzip
- ▶ Alice und Bob und Außerirdische
- ▶ Gravitative Zeitdilatation
- ▶ Raumzeit ist krumm Metric
- ▶ Einstein'sche Gleichungen

2: Gravitation, Masse, Trägheit

(Schwache) E



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

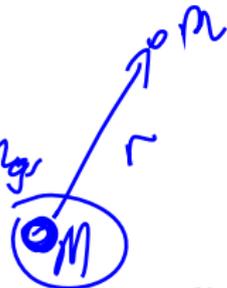
Newton + Newton

$$\vec{F} = m_t \vec{v}$$

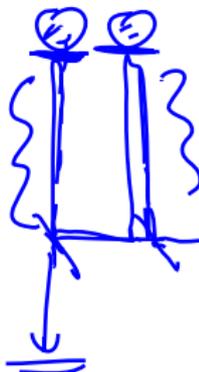
m_t : Trägheit

$$\vec{F} = -G \frac{m_t M}{r^3} \vec{r}$$

Gravitative Masse m_{gr}



Gleich,
alle
Körper

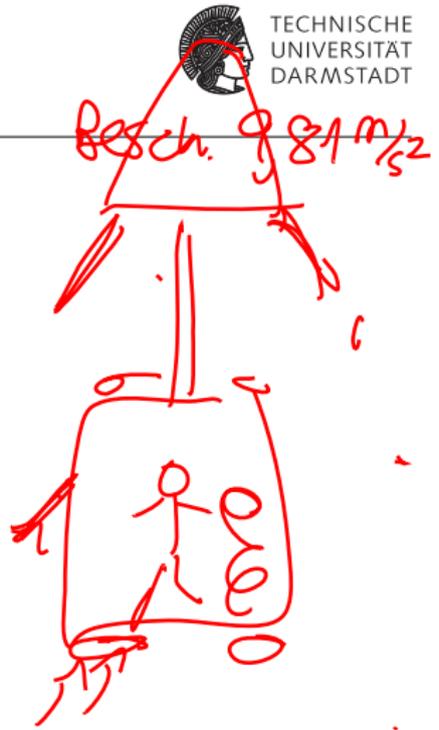
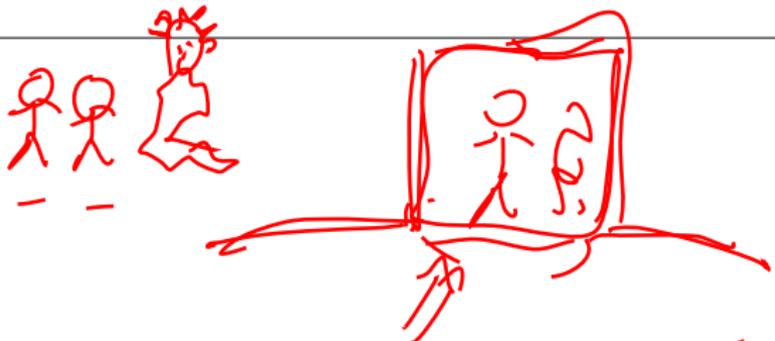


immer gleich bis zum 10^{13}

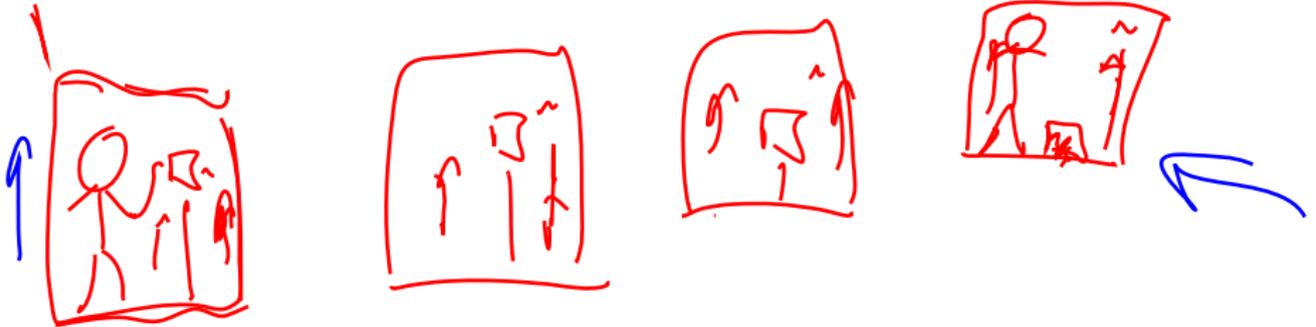
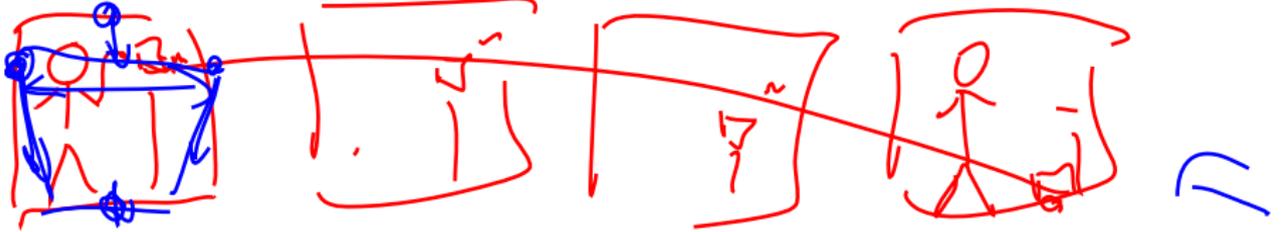
3: Alice und Bob und Außerirdische



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



4: Lassen wir etwas fallen...



5: Schwaches Äquivalenzprinzip



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\frac{m_t}{m_g}$$

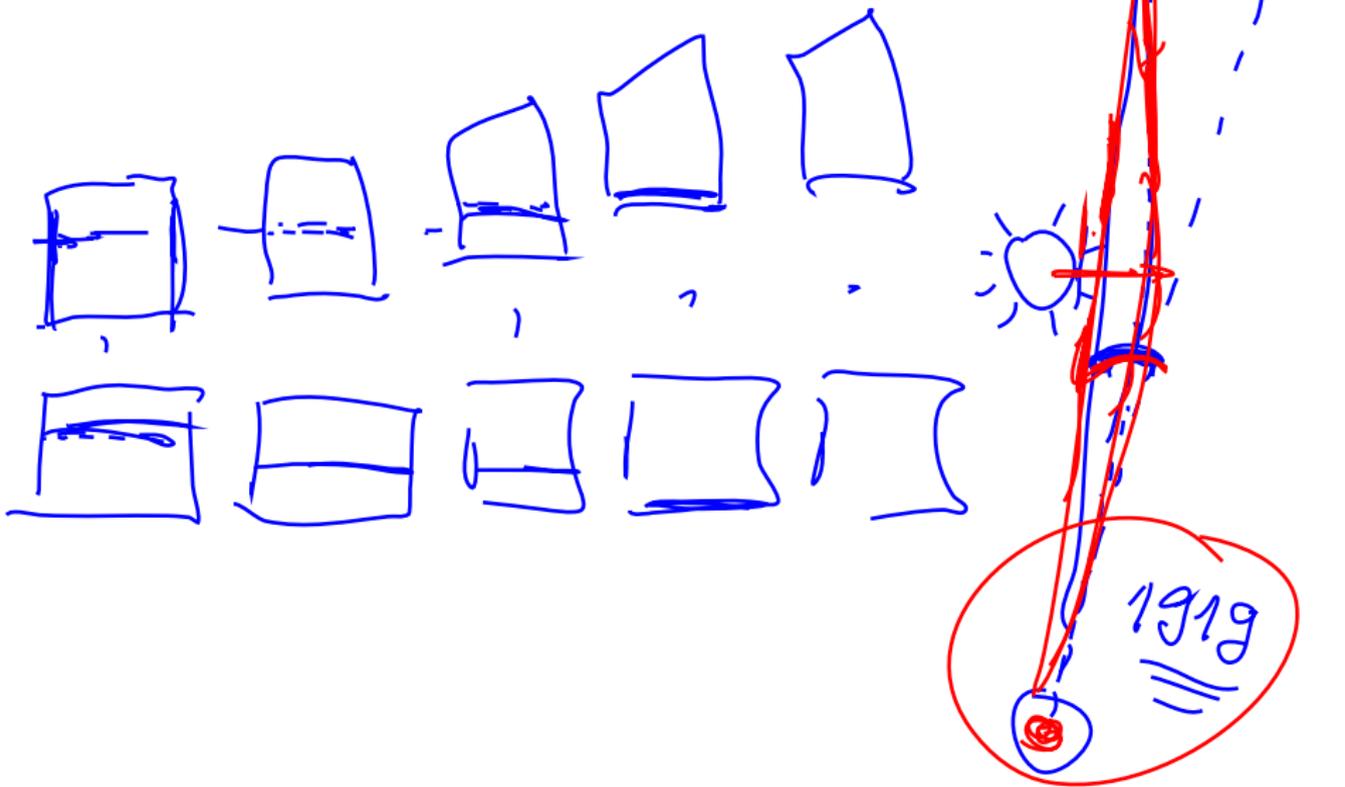
ist immer gleich bei alle Materiesorte.

Einstein'sche Äquiv. : Wenn Alice und Bob auch Experimente mit Licht probieren, können sie auch keinen Unterschied zw. Grav. und Beschd. finden

6: Licht fällt unter Gravitation



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



7: Gravitation, Rot/Blauverschiebung



$v=0$ $v=0$
 f_{prod}
 Gesch. des Detektors = $g \Delta t$
 $\Delta t = \frac{h\nu}{c}$ $\boxed{v = \frac{gh}{c}}$
 $f_{\text{gemessen}} = f_{\text{prod}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$ oder $\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$ $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$
 $\Rightarrow f_{\text{prod}} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) = f_{\text{prod}} \left(1 \pm \frac{gh}{c^2}\right)$ $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$
 Uhren ticken schneller, wenn v größer ist

8: Uhren, Turmen, Erde



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



$$\underline{\underline{\Delta t_{oben}}} = \Delta t_{unten} \left(1 + \frac{g \Delta h}{c^2} \right)$$

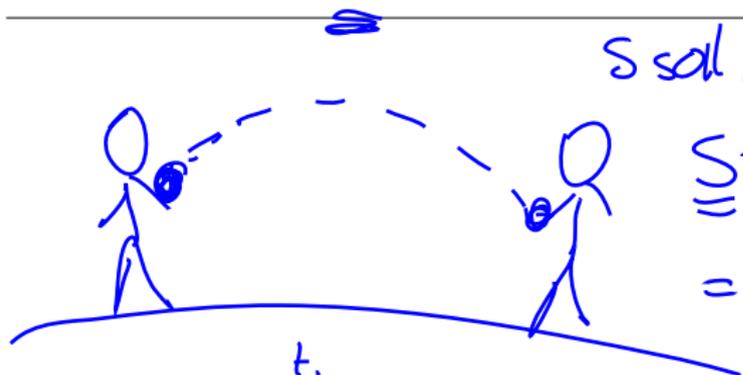
$$g \sim 10 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta h \sim 300 \text{ m}$$

$$\frac{3000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$\underline{\underline{\underline{\left(1 + 3,3 \times 10^{-14} \right)}}}$$

9: Ich werfe einen Ball...



S soll minimiert sein

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right)$$

Leigzeit

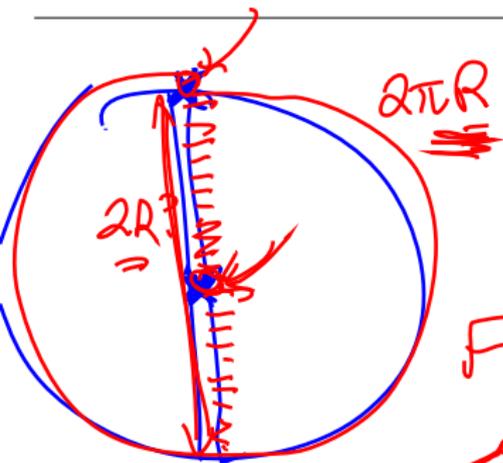
$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-mc^2 + \frac{mv^2}{2} - mgh \right]$$

T - V

Grav. potential
ist Grav. Potverschiebung
 $\left(1 + \frac{gh}{c^2} \right)$ oder $\left(1 + \frac{U_{\text{grav}}}{c^2} \right)$

10: Raum ist auch nicht flach



Nein, Durchmesser $\neq 2R$

Raumzeit ist krumm.

Fläche Raum:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$ds^2 - c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

$$dx = r_{2x} - r_{1x}$$

$$dy = r_{2y} - r_{1y}$$

$$ds^2 - c^2 dt^2 =$$

$$\begin{pmatrix} +c^2 dt & dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Minkowski'sche Metrik

11: Krummlinige Raumzeit, Metric

Eigenzeit $= \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$

$$dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^2 \\ r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Schwache Grav. $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{tx} & g_{xx} & g_{xy} & \dots \\ g_{ty} & & & \\ g_{tz} & & & \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1(1 + \frac{2gh}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1(1 - \frac{2gh}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12: Krümmungstensor



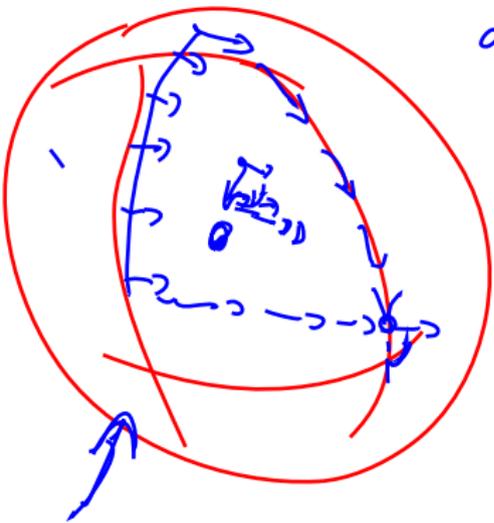
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13: Woher kommt die Metrik?

teilchen: max. Eigenzeit
 Licht: min. Zeitdauer



"Spacetime tells matter how to move
 Matter tells spacetime how to curve." – John Wheeler



$$V^{\mu'} = V^\mu + V^\nu R^\mu_{\nu\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ misst wie krumm
 Raumzeit ist

$$g_{\alpha\beta} R^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\nu}$$

Riemannsche Tensor

$$g_{\alpha\beta} R^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv R$$

Krümmungsskalar

14: Einstein'sche Gleichungen

$$T_{\mu\nu} =$$

Energiedichte ~~Impulsdichte~~
 Imp. Druck und Spannungstensor

$$\frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Einstein'sche Gleichungen

Hilbert $S = \sum_{\text{Teilchen}} -m c^2 \int d\tau + \int d^4x \frac{c^4}{G_N} \mathcal{L}$

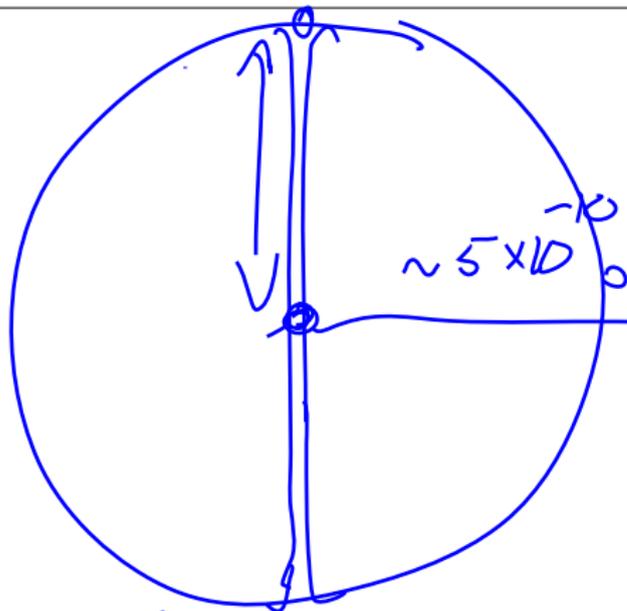
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} \Lambda$

15:

 V_{grav}

$$\rightarrow \frac{gh}{c^2}$$

$$\rightarrow \frac{GM}{r^2} \frac{1}{c^2}$$

 TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT
 
 $\sim 5 \times 10$ R

$$v \sim \frac{7 \text{ km}}{\text{s}}$$

$$\frac{10 \cdot 6 \times 10^6}{9 \times 10^6} \sim 7 \times 10^{-9}$$

$$f_{\text{sat.}} = f_{\text{erde}} \left(1 + \frac{(V_{\text{sat}} - V_{\text{erde}})}{c^2} \right)$$

$$= f_{\text{erde}} \left(1 + \frac{GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}{c^2} \right) \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_{\text{erde}}}$

16:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

17:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

20:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21:

22:



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT
