Theoretische Physik I:

Vorlesung 26: Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Newton I, II, III
- Generalisierte Koordinaten
- Zwangsbedingungen
- Minimierungsprobleme
- Wirkung, Lagrangefunktion, Lagrange II
- Lagrange I und Normalkräfte
- Hamilton, Legendre Transformation
- Himmeldynamik
- Starre Körper
- Schwingungen
- Relativitätstheorie

Auch Symmetrie, Erhaltungsgröße, numerische Methoden, Chaos

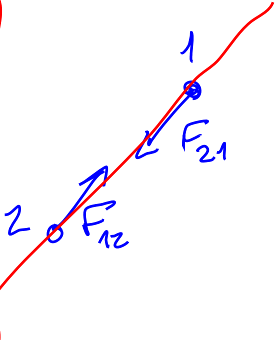
2: Newton I, II, III

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

I Bezugssyst: ohne Einfluss $\ddot{x} = 0$

II $\boxed{\underbrace{m}_{\text{Trägheit}} \ddot{x} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{Kraft}}}$

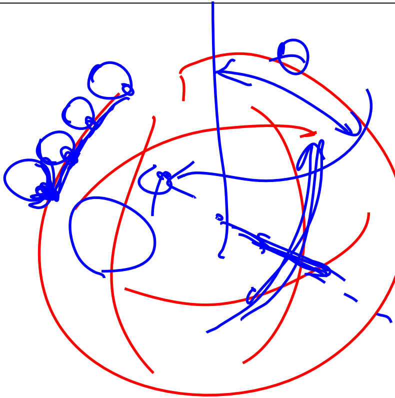
III $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



Kartesishe Koord.

3: Generalisierte Koordinaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



r, θ, φ

4: Zwangsbedingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - R = 0$$

$$f(q_i,t) = 0$$ (oder k oder $u(t)$)

$$\tilde{f} = f - k \qquad f - u(t) = \tilde{f}$$

$$\frac{d}{dt} f(q_i,t) = 0 = \frac{\partial f(q_i,t)}{\partial t} + \sum_i \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f(q_i,t)}{\partial q_i}$$

$$a_i$$

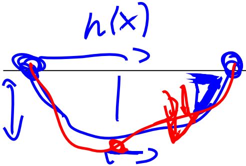
$$\boxed{0 = a_t + \sum_i a_i \frac{dq_i}{dt}}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_j} \neq \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$$

Nicht-
Nicht-Holonom.
Wenn- Holonom

nicht null - Rheonom
null - Skleronom
oder umgekehrt

5: Minimierungsprobleme



$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\sqrt{1+h'^2}}{\sqrt{2gh}} = \int_{x_0}^{x_1} F(h,h')\,dx$$

$$h(x_0)=0=h(x_1)$$

Um das zu minimieren, muss

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial h'}$$

oder $x \to t$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$$

6: Wirkung, Lagrangefunktion, Lagrange II

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

kin E pot E

$$L(q,\dot q,t) = T(\dot q,q,t) - V(q,t)$$

Wirkung $S = \int_{t_a}^{t_e} dt\, L(q,\dot q,t)$

Ham. Prinz. $\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

p_i kan. Impuls

$\dot q = S$

$\frac{d}{dt} S = \int$

Euler-Lagrange Gl.

Hol. Zwangsbed. $f(q_i,t) = q_s - k(t)$

7: Lagrange I, Normalkräfte

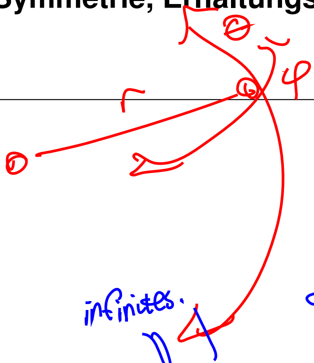
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L_{(\text{standard})} - \sum_a \lambda_a f_a(q_i)$$

Finde ich λ_a-Werten, wobei die ZB gehorchen

$\lambda(\ldots)$ Ausdrücke als Zwkr. interpretieren.

8: Symmetrie, Erhaltungsgrößen



φ: Zyklische Koord.

$$\mathcal{L}(r,\theta,\varphi) = \left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\frac{m}{2} - V(r)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi}}_{p_\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\ ) = 0$$

Erhaltungsgröße

$$\underbrace{q_i \to q_i + \alpha F_{ij} q_j}_{L \to L}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$p_i = p_i(q,\dot{q})$ $\quad$ $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p,q)$

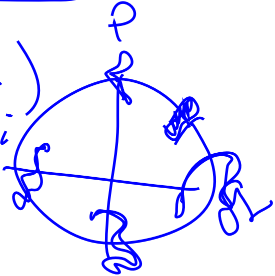
$H(q_i, p_i) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q})$ $\quad$ Als F von q,p

$$\boxed{\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{p,\, q_j \neq q_i} = -\dot{p}_i \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{q,\, p_j \neq p_i} = \dot{q}_i}$$

Ham'sche Gl.

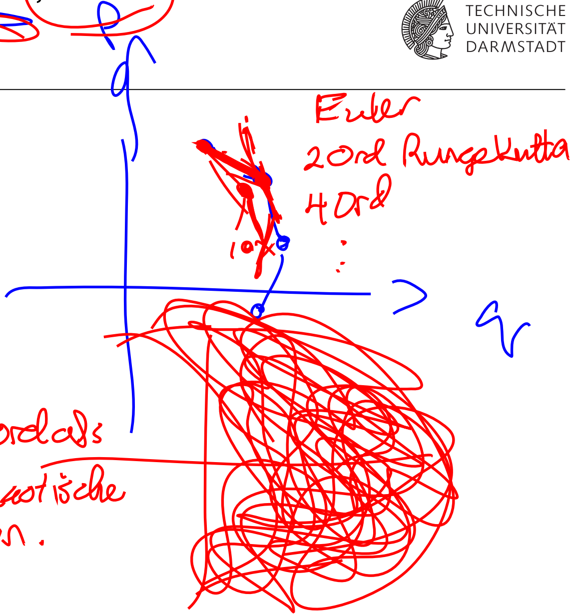
$$\{f(p,q), g(p,q)\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

$$\{f, H\} = \dot{f}$$



10: Numerische Methoden, Chaos

$$\begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \vdots \\ \dot p_1 \\ \dot p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(q,p) \\ f_2(q,p) \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$



Generisch: Mehr Koords als EG gibt → Chaotische Dyn.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2 körper

E

$$L = V(|r_e - r_s|) + \frac{m_e}{2}|\dot{r}_e|^2 + \frac{m_s}{2}|\dot{r}_s|^2$$

Relativ & Schwerpunkt

S

$$L = \underline{V(r_r)} + \underline{\frac{M_{ges}}{2}|\dot{r}_s|^2} + \underline{\frac{\mu}{2}|\dot{r}_r|^2}$$

$$M = m_s + m_e \simeq m_s$$

$$\mu = \frac{m_s m_e}{m_s + m_e} \simeq m_e$$

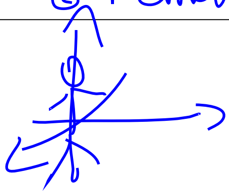
$$\underline{\dot{p}_\varphi = 0}$$

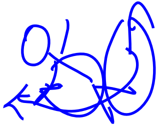
$$U = \underline{V(r)} + \underline{\frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}}$$

Eff Pot.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6 Freiheitsgrade





Inertial

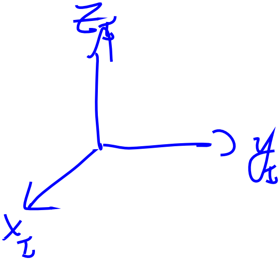
Körper Koord

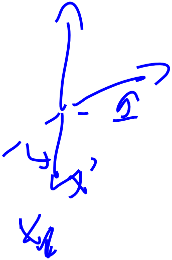
$$T_{rot} = \frac{1}{2}\,\omega_i\, I_{ij}\, \omega_j$$

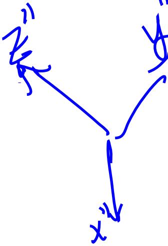
Träg. Tensor

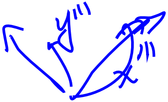
gleich in Körper

$$T = T_{schw.} + T_{rot}$$









13: Schwingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14: Relativitätstheorie

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15: Fragen

Frage: Haben Photonen Eigenzeit?

Antwort: Nein – ein Photon folgt eine Bahn, mit null Eigenzeit – das heißt, $c^2 dt^2 = |dx|^2$.
In flache Minkowskiraumzeit ist die Bahn gerade, und $c\Delta t = |\Delta\vec{r}|$.
In allgemeine Relativitätstheorie, wobei Raumzeit krumm ist, folgt Licht eine *Null-Geodäte*. (Es gab keine Zeit, Geodäte zu diskutieren.)

Frage: In 2 Bezugssysteme hat dieselbe Photon unterschiedliche Energien $E = h\nu$. Wie? Was ist mit der Energie passiert?

Antwort: Energie ist erhalten *ABER* Bezugssystemabhängig.
Photonen: $E = h\nu$ und $E = pc$. Koordinatenänderung: (Photon und v beide im $+x$-Richtung)

$$\begin{bmatrix} E' \\ cp' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ cp = E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta)E \\ \gamma(1+\beta)E \end{bmatrix} \qquad E' = E\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,.$$

Teilchen ändern auch ihre Energie: $E = \gamma mc^2$.
Ein Mehrteilchensystem hat eine gesamte E_{ges} und $\vec{p}_{\text{ges}}$, und in alle Bezugssysteme ist $E_{\text{ges}}^2 - c^2 p_{\text{ges}}^2$ gleich.

17: Weitere Fragen???

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' = x + \theta y \\ y' = y - \theta x \end{bmatrix}$$

θ ist "α" $F_{xy} = 1$ $F_{yx} = -1$

Erhaltungsgröße: $\sum_{ij} F_{ij} q_i p_j = \boxed{x p_y - y p_x}$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$ ist erhalten wenn

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

18: Weitere weitere Fragen?

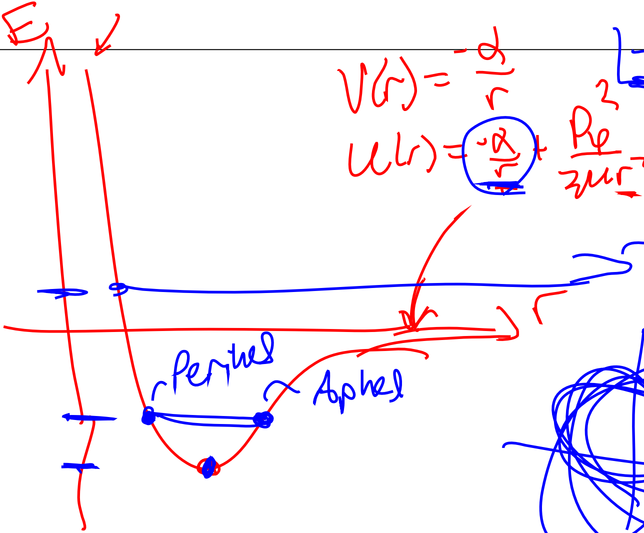
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

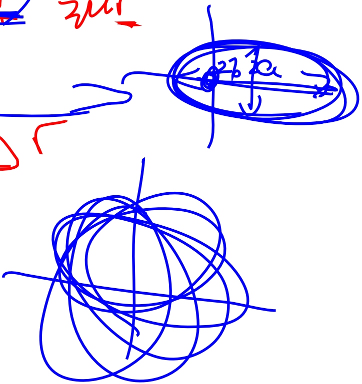
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}$$

Ellipse

$T^2 \propto a^3$

p_φ Erhalten





19: Noch weitere Fragen