Theoretische Physik I:

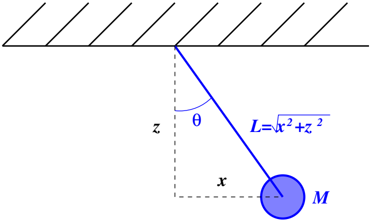
Generalisierte Koordinaten und Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vorschau: Probleme mit Energie zu lösen
- Generalisierte Koordinaten
- Zwangsbedingungen (Nebenbedingungen): Grundlage und Beispiele

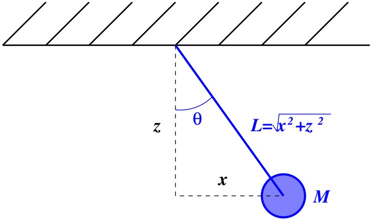
Vorschau: Energie

Betrachten Sie ein Pendel
(wie in Übung 1.4a):
hängt vom Ursprung.
Koordinaten: (x, z)
Schwerkraft: $V = gMz$ $(z < 0)$
Masse: M
Die Schnur ist starr, mit Länge L



Standard Newton'sche Methoden – Gravitationskraft, Normalkraft ...
Übungsblatt. Nicht einfach!

Energie: Pendel



Oder: Energie!
Geschwindigkeit $|\vec{v}| = L\dot{\theta}$. Energie:

$$E = V + T = -gML\cos\theta + \frac{ML^2}{2}\dot{\theta}^2$$

Energie bleibt *erhalten*!
Wenn Pendel bis zum Maximalwinkel $\theta = \theta_0$ schwingt:
$E = -gML\cos\theta_0$ und

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{L}}$$

Einfaches DGL 1. Ordnung, schnell gefunden!
Einfach, weil ich Energie *und* **Generalisierte Koordinaten** benutzt habe.

Generalisierte Koordinaten

Beispiel: 2 Teilchen, Masse M_1, M_2. Koordinaten:

- Standard: 6 Koordinaten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ Jeder Vektor enthält 3 Komponenten
- Alternative: $\vec{r}_s$ und $\vec{r}_r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
- Alternative: $\vec{r}_s$, Abstand $|r_2 - r_1| \equiv r$, und zwei Winkel θ, φ:
  $\vec{r}_r = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$ ($\vec{r}_r$ in Kugelkoordinaten)

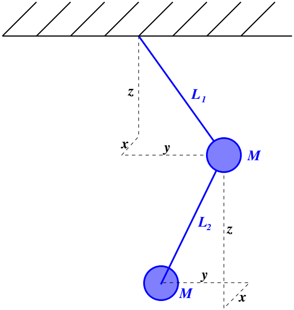
Allgemein: $3N$ Komponenten $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N$ können als Funktionen von $3N$ verallgemeinerte/generalisierte Koordinaten $q_1 \ldots q_{3N}$ geschrieben werden

$$r_1 = r_1(q_1 \ldots q_{3N}) \qquad \text{oder} \qquad q_i = q_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

Schon bekannte Beispiele: Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten.

Ein *starrer Körper* braucht 6 Gen. Koordinaten:
3 Schwerpunktskoordinaten und 3 Winkel.
Werden wir später im Kurs weiter diskutieren....

Beispiel: Doppel Sphärisches Pendel



Ein sphärisches Pendel hängt
von einem sphärischem Pendel!
Beide Schnüre haben feste Längen:

$$\left|\vec{r}_1\right| = L_1 , \quad \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = L_2 .$$

Mit welchen Koordinaten soll ich dieses System schreiben,
um es *effizient* zu lösen?

Doppel Sphärisches Pendel

Möglichkeiten:

- Ursprung, wo das erste Pendel hängt.
  Koordinaten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Problem: $L_2 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ist kompliziert.
- $\vec{r}_1$ und Unterschied $\vec{r}_r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Jetzt sind $|\vec{r}_1| = L_1$ und $|\vec{r}_r| = L_2$
- $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_r$, aber jeder in Kugelkoordinaten!
  r_1, θ_1, φ_1 und r_r, θ_r, φ_r

Die beiden Schnüre haben feste Längen $\Rightarrow r_1 = L_1$ und $r_r = L_2$.
Daher ist dieses letzte Koordinatensystem sehr effizient – zwei Koordinaten sind schon bekannt!

"*You can choose any coordinate system you want, but if you use the wrong one, you will be sorry.*" **Steven Weinberg**

Zwangsbedingungen / Nebenbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine Zwangsbedingung / Nebenbedingung ist eine Bedingung, wobei nicht alle Koordinatenwerte möglich sind. Beispiele:

- Pendel mit starrer Schnur – Länge $|\vec{r}| = L$
- Eishockeyscheibe auf Eis.
  - ebenes Eis: $r_z = 0$.
  - unebenes Eis: $r_z = h(x, y)$ (Gut dass Darmstadt kein Eisregen hat)
- Achterbahn: 2 Zwangsbedingungen: $\vec{r} = \vec{r}(\ell)$, wobei ℓ die Länge entlang der Bahn ist.

Solche Bedingungen sind in realen Anwendungen allgegenwärtig.

Generalisierte Koordinaten sind nützlich, wenn Zwangsbedingungen die Werte bestimmter Koordinaten festlegen.

Zwangsbedingungen: Sorten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Jedes Mal, wenn wir mit einem neuen Konzept arbeiten, müssen wir zunächst ein gemeinsames Vokabular zur Beschreibung der Konzepte entwickeln.
Leider kommen in diesem Fall die Namen alle aus dem Griechischen.

- Wir nennen Zwangsbedingungen **Holonome**, wenn es die Möglichkeit gibt zu schreiben:

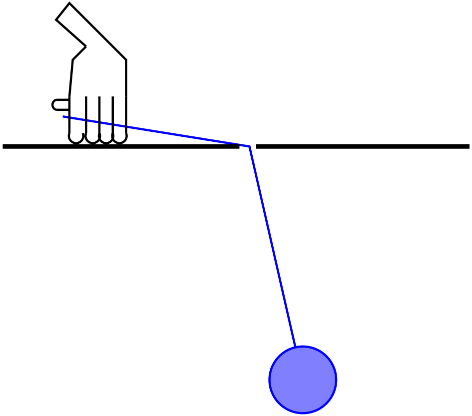
  $$f(q_1, q_2, \ldots q_{3N}; t) = 0$$

  zum Beispiel, für unser Pendel, $\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - L = 0$. Oder, für eine Eishockeyscheibe, $r_z - h(x, y) = 0$.
  Diese fallen in 2 weitere Katagorien:
  - **Skleronome Zwangsbedingungen**: wenn $f(q_1, \ldots)$ keine explizite Zeitabhängigkeit hat: $f = f(q_1, \ldots q_{3N})$
  - **Rheonome Zwangsbedingungen**: wenn $\partial_t f(q_1, \ldots q_{3N}, t) \neq 0$, d.h., die Bedingungen ändern sich mit Zeit (Eishockeyscheibe auf einer Fläche, die sich hebt und senkt)

  Skleronom ist Griechisch für starr. Rheonom: fließend.
- die **Nicht Holonomen** Zwangsbedingungen sind alle, die nicht im Form $f(q_1, \ldots, q_{3N}, t)$ geschrieben sein können.

Rheonome Holonome Beispiel

Pendel, wobei die Schnur durch eine Öffnung kommt, und ich sie länger oder kürzer (als Funktion von Zeit) machen kann



Nicht Holonome Zwangsbedingungen???

Das Leben ist schwer. Nicht alle Zwangsbedingungen sind so einfach zu schreiben. Beispiele?

- Ein Puck prallt auf das Eis. Wir finden eine Ungleichheit: $z \geq h(x, y)$ oder $f(q_1, \ldots q_{3N}) \geq 0$
- Zwangsbedingungen, die irgendwie von der Geschichte des Systems abhängig sind.

Beispiel, zweite Kategorie: Euler's Disk
`https://www.youtube.com/watch?v=rFtYzVJcWyA`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_Disk`
Bitte weiter lesen (auch Kuypers, Seite 50 "Rollende Kreisschreibe").

Holonom oder Nicht Holonom?

Betrachten Sie eine holonome Zwangsbedingung. Wie benutze ich sie?

$$0 = f(q_j, t)$$

$$\text{Gesamtdifferenz: } 0 = df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\text{Deshalb } 0 = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \,.$$

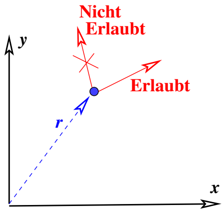
Wir *nennen* $\frac{\partial f}{\partial q_j} = a_j(q)$ und $\frac{\partial f}{\partial t} = a_t(q)$. So:

$$\sum_j a_j(q) \dot{q}_j = -a_t \,. \tag{1}$$

Aber was passiert, wenn $a_j(q)$ und $a_t(q)$ gegeben sind?
Das ist sicherlich eine Zwangsbedingung.
Aber kann ich sicher sein, dass ein $f(q_j, t)$ existiert?

Zwangsbedingung: was ist $a_i(q)$?

Zwangsbedingung: “Ein Körper kann sich in eine Richtung nicht bewegen.”



Auf Punkt $\vec{r}$ gibt es eine Richtung, in die ich mich nicht bewegen kann. Die orthogonalen Richtungen sind erlaubt.

Die nicht-erlaubte Richtung kann ich als (3N-dimensionale) Vektor schreiben: $a_i(\vec{r})$.

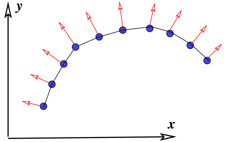
Weil das System sich in die Richtung nicht bewegen kann, finde ich

$$\sum_i a_i(q)\frac{dq_i}{dt} = 0 \quad \text{(oder} \quad = -a_t(q) \quad \text{wenn rheonom.)}$$

Wenn $a_t(q) \neq 0$ (rheonome Zwangsbedingung), bedeutet es, dass das System sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit in die a-richtung bewegen muss.

Zwangsbedingungen und f

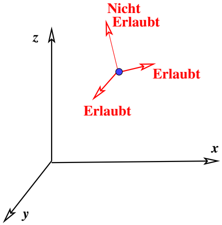
2 Dimensionen – wir können der erlaubten Richtung folgen!



Wenn ich mich immer senkrecht der nicht-erlaubten Richtung bewege, folge ich einer Kurve. Nur Punkte auf dieser Kurve sind erlaubt.

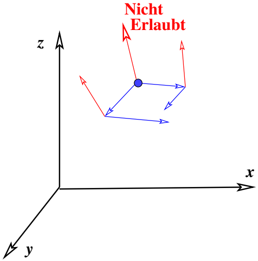
Eine Kurve kann ich immer mathematisch als $f(r_i) = 0$ beschreiben.

3 oder mehr Dimensionen:



Jetzt gibt es mehrere senkrechte Richtungen.
Ich kann mich in mehrere Richtungen bewegen.

Zwangsbedingungen: Holonom, Nicht Holonom



Wenn ich mich ein bisschen in Richtung 1 bewege,
und danach in Richtung 2,
immer senkrecht der a_i Vektoren
ODER erst in Richtung 2, dann in Richtung 1
Komme ich auf den gleichen Punkt,
oder komme ich mit ein bisschen Abstand?

Vorsicht! Die Richtung a_i kann sich ändern!
Ich komme auf den gleichen Punkt, solange

$$\frac{\partial}{\partial q_j} a_i = \frac{\partial}{\partial q_i} a_j$$

In diesem Fall bleibe ich auf eine Oberfläche senkrecht der nicht-erlaubten Richtung.

Holonom oder nicht holonom?

Frage: Wenn $a_j(q), a_t(q)$ gegeben sind, kann ich $f(q_j, t)$ finden?
Antwort: nicht immer! *Wenn* $a_j \equiv \frac{\partial f}{\partial q_j}$, dann

$$\frac{\partial}{\partial q_l} a_j = \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_j} a_l$$

Deshalb existiert $f(q_j, t)$ nur, wenn $\frac{\partial}{\partial q_l} a_j = \frac{\partial}{\partial q_j} a_l$.
Und wenn diese Bedingung gilt, kann ich $f(q_j, t)$ durch Integration finden.
Deshalb ist eine Zwangsbedingung von Form

$$a_j(q)\dot{q} + a_t(q) = 0$$

holonom genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial q_l} a_j = \frac{\partial}{\partial q_j} a_l$$

Plan / Ziel

Betrachten Sie ein physikalisches System. Ich will die Evolution (Zeitabhängigkeit) lösen. Was soll ich machen?

1. Alle holonomen Zwangsbedingungen $f_i(q_1 \ldots q_{3N}, t) = 0$ finden.
2. Generalisierte Koordinaten finden, wobei $f_i(q_1 \ldots q_{3N}, t) = q_i - K$ ist.
   Das heißt, ich sollte nach generalisierten Koordinaten suchen, wo die Zwangsbedingungen die einfachstmögliche Form haben – optimal, dass n Koordinaten fest bleiben.
3. Energie Methoden benutzen, um das Problem in Generalisierte Koordinaten leicht zu lösen. (Wie? Das werden wir sehen!)

Summary in English

First, we saw that using energy and its conservation sometimes makes it very efficient to solve problems.
This worked partly because we used **Generalized Coordinates**, which are when you re-organize the $3N$ linearly independent coordinate components $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N$ into $3N$ different linearly-independent functions $q_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$.
Energy methods are especially needed in problems with **constraints of motion** – conditions on the coordinates which forbid them from taking “just any” value. These we distinguish into

- **Holonomic constraints,** those of form $f(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$, where
  - those where $\partial f / \partial t = 0$ are called **Scleronomous holonomic constraints**, and
  - those where $\partial f / \partial t \neq 0$ are called **rheonomous holonomic constraints**; and
- **Nonholonomic constraints** are all others, for instance those of form

$$\sum_j a_j \dot{q}_j + a_t = 0 \quad \text{but where} \quad \frac{\partial}{\partial q_l} a_j \neq \frac{\partial}{\partial q_j} a_l \,,$$

  so the equation cannot be integrated to find a function $f(q_j, t)$.

Potenzial? Oder Potenzial Energie?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Jedes konservative Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ ($\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$) kann als $\vec{A} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ geschrieben sein.
V nennen wir ein Potenzial.
Wenn unser Vektor die *Kraft* ist, nennen wir $V(\vec{r})$ die Potenzielle Energie.

Ab und zu bin ich nachlässig, und schreibe “Potenzial” oder “Potenzielle Energie,” als ob sie gleich sind.

Wenn wir über Gravitation diskutieren, werden wir uns mit einem Gravitationspotenzial befassen. Das wird nicht gleich potenzielle Energie sein....

Am Besten: Potenzielle Energie zu sagen, wenn $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$. Wenn $\vec{A} = -\vec{\nabla} V$ und $\vec{A}$ *nicht* eine Kraft ist, sollen wir Potenzial sagen.