Theoretische Physik I:

Vorlesung 4: Zwangskräfte

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

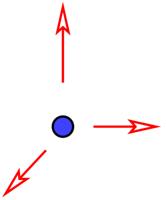
Heute:

- Zwangsbedingungen und Freiheitsgrade
- Normalkräfte
- Beispiele

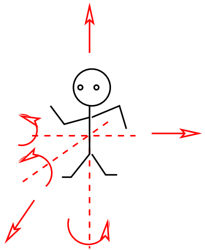
Ziel: Wie funktionieren Zwangsbedingungen?
Wie sind Zwangsbedingungen durchgesetzt?

Freiheitsgrade

Wieviele generalisierte Koordinaten brauchen wir, um ein System zu beschreiben? Diese Zahl nennen wir die Zahl der Freiheitsgrade.



Teilchen: 3



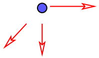
Starre Körper: 6

Action-Figur: 6
+(1×4) (Ellenbogen, Knie)
+(3×4) (Schultern, Hüften)
+2? (Hals)

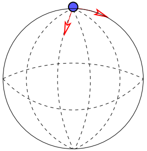
Die “Freiheitsgrade” sind die linear-unabhängigen Möglichkeiten, um ein System zu ändern.

Zwangsbedingungen

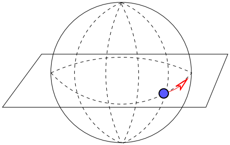
Jede holonome Zwangsbedingung reduziert
die Anzahl der Freiheitsgrade um eine.



Ein Teilchen hat 3 Freiheitsgrade:
kann sich in x, y, oder z Richtung bewegen.



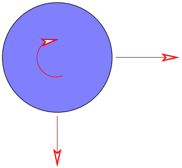
Zwangsbedingung:
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (oder $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$)
auf einer Kugel hat es 2 Freiheitsgrade:
θ und φ



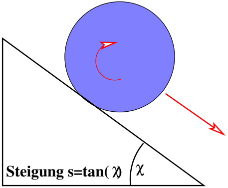
Noch eine Zwangsbedingung:
$z = 0$ (oder $\theta = \pi/2$)
auf einer Kugel und einer Ebene
nur ein Freiheitsgrad: φ

Beispiel: Zylinder auf einer schiefen Ebene

Ein Zylinder in der x, y-Ebene rollt ohne zu rutschen eine schiefe Ebene runter.



Allein in der Welt: 3 Freiheitsgrade
x, y, und θ



Auf einer Ebene: Zwangsbedingung
$y = s(x - x_0)$ wobei Steigung $s = \tan(\chi)$.
2 Freiheitsgrade: x und θ

Rollt ohne zu rutschen: Zwangsbedingung
$d\theta = \sqrt{1 + s^2} dx / R$
Integrierbar: $\theta = \theta_0 + x\sqrt{1 + s^2}/R$
Nur ein Freiheitsgrad: y (oder θ)

Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

Betrachten Sie ein System mit N generalisierte Koordinaten $q_1, \dots, q_N$
und k unabhängige holonome Zwangsbedingungen

$$f_i(q_1, \dots, q_N) = 0\,, \qquad i = 1, \dots, k$$

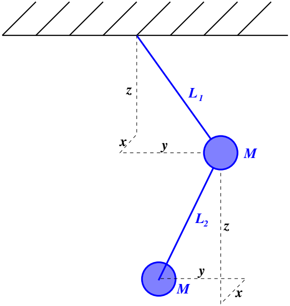
Jede Zwangsbedingung macht es möglich, eine Koordinate als Funktion der anderen Koordinaten zu lösen

Jeder f_i definiert eine Oberfläche der Kodimension 1. Ihr Schnittpunkt ist eine Oberfläche der Kodimension k, und Dimension $N - k$.

Deshalb habe ich insgesamt $N - k$ unabhängige (generalisierte) Koordinaten.

Wenn ich klug bin, kann ich generalisierte Koordinaten finden, wobei meine Zwangsbedingungen nur sind, dass q_{N-k+1} bis q_N alle gleich 0 sind.

N gen. Koordinaten, k Zwangsbedingungen



Betrachten Sie das Doppelpendel

6 Koordinaten: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$
2 Zwangsbedingungen:
$f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - L_1^2 = 0$
$f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L_2^2 = 0$

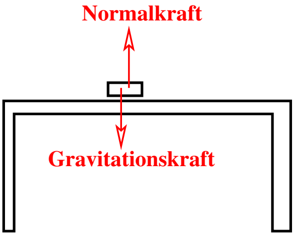
Besser: Generalisierte Koordinaten r_1, θ_1, φ_1 und r_2, θ_2, φ_2:

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1, z_1) &= (r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1, r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1, r_1 \cos\theta_1)\,, \\
(x_2, y_2, z_2) &= (r_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 + x_1, r_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2 + y_1, r_2 \cos\theta_2 + z_1).
\end{aligned}
$$

6 generalisierte Koordinaten $(r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2)$
und zwei Zwangsbedingungen $f_1 = r_1^2 - L_1^2$, $f_2 = r_2^2 - L_2^2 \Rightarrow r_1 = L_1$ und $r_2 = L_2$
$6 - 2 = 4$ *freie* generalisierte Koordinaten.

Normalkräfte

Wie sind diese Zwangsbedingungen durchgesetzt? **Normalkräfte**



Eine Masse sitzt auf einem Tisch.
Zwangsbedingung: $z = z_0$ die Tischhöhe.
Gravitationskraft will z ändern.
Der Tisch übt eine Normalkraft aus.
Wie groß? Groß genug, dass $z = z_0$.
Gravitationskraft: $F_N = -gM\vec{e}_z$.
Deshalb muss $F_N = +gM\vec{e}_z$ sein.

In diesem Beispiel ist es einfach, die Richtung und Stärke der Normalkraft zu finden.
Allgemein: nicht immer so einfach.

Normalkräfte

Betrachten Sie ein System mit Zwangsbedingungen:

$$f_i(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = 0\,, \quad i = 1 \dots k$$

Newton II:

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i$$

Aber wie kann denn $f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$ bleiben?
$3N$ Gleichungen, für $3N - k$ unabhängige (generalisierte) Koordinaten...

Lösung:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,V} + \vec{Z}_i \quad \text{wobei} \quad \vec{F}_{i,V} = -\vec{\nabla} V(r_i, \dots)$$

und $\vec{Z}_i$ sind die *Normalkräfte*

Die Werte der Z_i sind die, die es braucht,
so dass die Zwangsbedingungen erfüllt bleiben.

Normalkräfte

In welche Richtung zeigt eine Normalkraft?

Immer *senkrecht* zu den erlaubten Richtungen.

Im $3N$-dimensionalen Raum schränken die Zwangsbedingungen die Bewegung so ein, dass sie auf einer $3N - k$-dimensionalen Oberfläche (wirklich, Mannigfaltigkeit) bleibt. Es gibt k normale Richtungen. Die Normalkraft zeigt in einer linearen Kombination dieser normalen Richtungen.

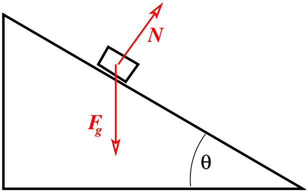
Die Normalkraft entsteht nicht aus einem Potentialenergie.
(Das System bewegt sich nicht in die Normale Richtungen...)

Wie rechne ich Z_i?
Jeder Zwangsbedingung gibt eine Richtung n_i im $3N$-dimensionalen Raum ($i = 1 \ldots 3N$): $n_i = \partial f / \partial q_i$. Es gibt keine Bewegung parallel zu n_i.
Gramm-Schmidt: finden wir k orthonormale Richtungen $n_{i,1}, \ldots, n_{i,k}$.
Wir schreiben die Gesamtkraft als $\vec{F} = \vec{F}_V + \sum_i \vec{Z}_i$, wobei $\vec{Z}_i = z_i \vec{n}_i$
Wir finden die Werte z_i, so dass die Bedingungen wahr bleiben.

Einfaches Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine Masse rutscht ohne Reibung eine Schräge hinunter



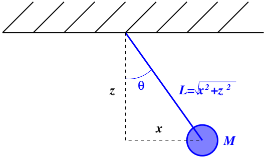
Gravitationskraft $\vec{F}_g = (0, -gM)$
Zwangsbedingung: $y = y_0 - x \tan\theta$ oder
$f = (y - y_0)\cos\theta + x\sin\theta = 0$
Normalrichtung: $\vec{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$
Normalkraft: $\vec{Z} = (z\sin\theta, z\cos\theta)$
$\ddot{f} = 0 = \cos\theta\,\ddot{y} + \sin\theta\,\ddot{x}$

Gesamtkraft: $\vec{F} = (z\sin\theta, -gM + z\cos\theta) = M(\ddot{x}, \ddot{y})$

$$\sin\theta\,\ddot{x} + \cos\theta\,\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = gM\cos\theta\,, \quad \vec{F} = (gM\cos\theta\sin\theta, -gM\sin^2\theta)\,.$$

Zwangsbedingung und Richtung und Größe der Zwangskraft

Einfaches Pendel: Koord. (x, z)
Zwangsbedingung $f(x, z, t) = x^2 + z^2 - L^2 = 0$

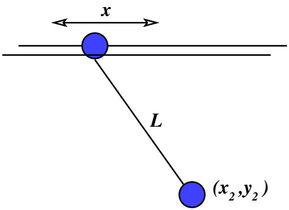


$$
\begin{aligned}
0 = \frac{df(x,z,t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
0 &= 0 + 2x\dot{x} + 2z\dot{z} \\
0 &= a_t + a_x\dot{x} + a_z\dot{z}
\end{aligned}
$$

Zwangskraft muss in der Richtung (a_x, a_z) zeigen: $\vec{n} \propto (a_x, a_z) = (2x, 2z)$.
$\vec{Z}_1 = (z_1 a_x, z_1 a_z) = z_1(2x, 2z)$.
Aber z_1 ist nicht $|Z_1|$ die Größe der Kraft, weil $|\vec{n}| \neq 1$ ist.

Es wäre gleich, aber wahrscheinlich besser, Normalisierung von $\vec{n}$ zu $\vec{n}/|\vec{n}|$ zu ändern: $\vec{n} = (x/L, z/L) = \vec{n}_{\text{old}}/2L$
$\vec{Z}_1 = z_1(x/L, z/L)$ und jetzt ist z_1 die Größe der Kraft.

Komplizierteres Beispiel



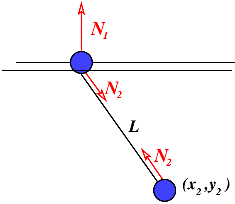
Eine Kugel wird zwischen 2 horizontalen, parallelen Stangen gehalten.
Sie rollt ohne Reibung.
Ein Seil mit Pendelscheibe hängt von der Kugel.
Die Massen sind M_1 und M_2.
Das Problem ist in 2 Dimensionen.
4 Koordinaten: (x_1, y_1), (x_2, y_2)

2 Zwangsbedingungen: $f_1 = y_1 = 0$ und $f_2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - L^2 = 0$

Die 4 Koordinaten als 4-Tupel schreiben: (x_1, y_1, x_2, y_2).
Gravitationskraft: $F_g = (0, -gM_1, 0, -gM_2)$.
Normalkräfte?

Rollpendel, Folie 2

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Koord. $(x_1, y_1; x_2, y_2)$
Zwangsbedingung 1: $f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = y_1 = 0$
Zwangsbedingung 2:
$f_2(...) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2 = 0$
Normalkraft 1: $\vec{n}_1 = (0, 1; 0, 0)$, $Z_1 = (0, z_1, 0, 0)$
Normalkraft 2: $\vec{Z}_2 = z_2\, \vec{n}_2$,
$\vec{n}_2 = (2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), 2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$

$\vec{n}_2$ hat keine Einheitslänge. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$.
Ich *kann* so weiter arbeiten.
Ich *persönlich* finde es *sauberer*, wenn ich mit orthogonalen, normalisierten Normalvektoren arbeite.

Orthogonal und Normalisiert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zwangsbedingung 1: $f = y_1 = 0$. Normalvektor: $n_1 = (0, 1, 0, 0)$.
Zwangsbedingung 2: $f = y_2^2 + (x_1 - x_2)^2 - L^2 = 0$.
Normalvektor $\Rightarrow$ Länge 1: $n_2 = ((x_1 - x_2), -y_2, (x_2 - x_1), y_2)/\sqrt{2}L$
Gram-Schmidt:

$$n_2' = \frac{1}{\sqrt{2(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}} ((x_1 - x_2), 0, -(x_1 - x_2), y_2)$$

Gesamtkraft:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + z_1 \vec{n}_1 + z_2 \vec{n}_2 = \left(z_2 \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{...}}, -gM_1 + z_1, -z_2 \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{...}}, \frac{z_2 y_2}{\sqrt{...}} - gM_2 \right)$$

Zwangsbedingung 1: $z_1 = gM_1$. Zwangsbedingung 2:

$$\frac{d^2}{2dt^2} f_2 = 0 = y_2 \ddot{y}_2 + \dot{y}_2^2 + (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)(x_1 - x_2) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \ldots$$

Noch *unendlich* viel Algebra zu tun, z_2 zu rechnen ....

Normalkräfte: was wir lernen

Newton'sche Methode: Zwangsbedingungen brauchen Normalkräfte.
Richtung der Kräfte: einfach (oder nicht SOOOO schwer) zu finden

Zwangskraft wegen Zwangsbedingung k: $\vec{Z}_k = z_k \sum_\ell \frac{\partial f_k(q_1, \ldots, q_{3N})}{\partial q_\ell} \hat{e}_\ell$

Stärke der Kräfte: was wir brauchen, dass alle Zwangsbedingungen gehorchen.
Nicht immer einfach zu rechnen!

Newton'sche Mechanik mit Zwangsbedingungen und Zwangekräfte sind nicht einfach.
Gibt es andere – bessere Methoden?? Bitte???

Summary in English

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- A problem is described in terms of **Degrees of Freedom**.
- A particle has 3 degrees of freedom; a rigid body has 6.
- Each constraint reduces the number of degrees of freedom by 1.
- Maintaining constraints requires normal forces. These are directed orthogonal to the surface of allowed directions.
- The magnitudes of the normal forces are determined by requiring that the constraints continue to hold as a function of time, $\ddot{f} = 0$. In some cases this leads to very nontrivial relations.

We would profit from a formalism which handles problems with constraints in a natural way.

Wiederholung: Gram Schmidt

Wenn ich k Vektoren n_1 ... n_k habe, und ich k orthonormale Vektoren haben möchte, die den selben Unterraum überspannen, wende ich das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$
\begin{aligned}
\vec{n}'_1 &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|}, \\
\vec{n}'_2 &= \frac{\vec{n}_2 - \vec{n}'_1(\vec{n}_2 \cdot \vec{n}'_1)}{\left|\vec{n}_2 - \vec{n}'_1(\vec{n}_2 \cdot \vec{n}'_1)\right|} \\
\vec{n}'_j &= \frac{\vec{n}_j - \sum_{i=1}^{j-1} n'_i(\vec{n}_j \cdot \vec{n}'_i)}{\left|\vec{n}_j - \sum_{i=1}^{j-1} n'_i(\vec{n}_j \cdot \vec{n}'_i)\right|} \ldots
\end{aligned}
$$

Die $n'_1, n'_2, \ldots$ sind orthogonal und Länge 1 (orthonormal).