Theoretische Physik I:

Vorlesung 3+4 Fragen Geantwortet

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zwei Fragen

- Pendel und Normalkraft
- Holonom und Doppelableitungen

Pendel und Normalkraft

Betrachten Sie ein Pendel, masse m, länge L, Koordinaten (x, y)

- Gravitationskraft $\vec{F}_g = -gm\hat{e}_y = (0, -gm)$
- Zwangsbedingung $f(x, y) = x^2 + y^2 - L^2 = 0$

$$\text{Zwangskraft} \qquad \vec{Z} = z(n_x, n_y) = z\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) = z(2x, 2y)$$

$$\text{Gesamtkraft} \qquad \vec{F} = (2xz, 2yz - gm) = (m\ddot{x}, m\ddot{y})$$

$$\text{Zwang:} \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 = 2\dot{x}\dot{x} + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}\dot{y} + 2y\ddot{y}$$

$$0 = 2\dot{x}^2 + 2x\frac{2xz}{m} + 2\dot{y}^2 + 2y\frac{2yz - gm}{m}$$

$$\text{Lösung:} \qquad (4x^2 + 4y^2)z = m\left[2gy + 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2\right]$$

$$z = \frac{m}{2L^2}\left[gy + \dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]$$

Einheit-Normalisierung: $(n_x, n_y) = (x/L, y/L)$ und $z = (m/L)$....

Holonom/Nicht Holonom und da_j/dq_i

Zwangsbedingung: für jeden Koordinatenwert gibt es eine Richtung, in die wir uns nicht bewegen können:

$$\exists a_j(q) \ : \ \sum_j a_j(q) \frac{dq_j}{dt} = 0 \quad (\text{oder} = a_t(q), \text{ rheonom})$$

Holonom: $f(q_i) = 0$, deshalb $\quad \frac{d}{dt} f(q_i) = 0 = \sum_j \frac{df}{dq_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow a_j(q) = \frac{df(q)}{dq_j}$

Doppelableitungen sind Reihenfolgeunabhängig:

$$\frac{d}{dq_k} a_j(q) = \frac{d}{dq_k} \frac{d}{dq_j} f(q) = \frac{d}{dq_j} \frac{d}{dq_k} f(q) = \frac{d}{dq_j} a_k(q)$$

Kontraposition: Wenn $\quad \frac{d}{dq_k} a_j(q) \neq \frac{d}{dq_j} a_k(q) \quad$ dann existiert keine $f(q)$...

Nicht-triviales mathematisches Ergebnis: Wenn $\partial a_j/\partial q_k = \partial a_k/\partial q_j$, dann existiert $f(q)$....