Theoretische Physik I:

Vorlesung 5: Minimierungsprobleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Randbedingungen
- Lagrangefunktion und Wirkung
- Minimierung – interessantes Beispiel
- Minimierung – mathematische Methoden

Rote Faden

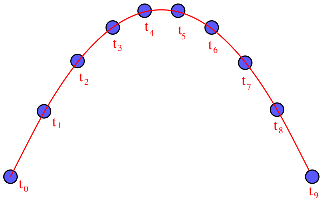
Wir suchen nach eine bessere Methode, Mechanikprobleme zu lösen:

- Kann mit *Generalisierte Koordinaten* arbeiten
- Kann leicht mit *Zwangsbedingungen* arbeiten
- Auf Energie basiert

Bemerkung (Präsenzübung): Wirkung $\int_{t_i}^{t_f}(T - V)dt$ ist minimiert.
(Hamiltonsches Prinzip. Werden wir nachher weiter diskutieren....)

Wir versuchen um Mechanik zu umformulieren, als *Minimierungsproblem.*
Aber zuerst (Heute) müssen wir solche Probleme diskutieren...

Randbedingungen



Ball unter Gravitation (Schwerkraft):

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} &= -g\vec{e}_z \\
\vec{r}(t) &= (x_0 + v_{x0}t, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t - gt^2/2)\,.
\end{aligned}
$$

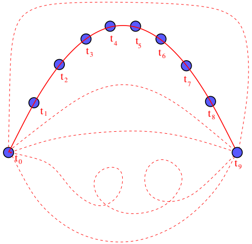
Einfach gelöst, wenn ich $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ kenne

Alternativ: Wenn ich $r(t = 0)$ und $r(t = t_f)$ kenne:

$$
\begin{aligned}
r_x(t_f) = x_f = x_0 + v_{x0}t_f \quad &\Rightarrow \quad v_{x0} = \frac{x_f - x_0}{t_f} \\
r_y(t_f) = y_f = y_0 + v_{y0}t_f \quad &\Rightarrow \quad v_{y0} = \frac{y_f - y_0}{t_f} \\
r_z(t_f) = z_f = z_0 + v_{z0}t_f - \frac{gt_f^2}{2} \quad &\Rightarrow \quad v_{z0} = \frac{v_f - v_0 + gt_f^2/2}{t_f}
\end{aligned}
$$

Lösbar mit $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$ *oder* $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_f)$!

Vorschau auf Lagrange'sche Mechanik



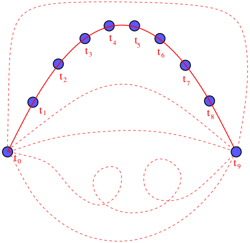
Betrachten Sie alle möglichen Bewegungsbahnen, die mit $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ anfangen und auf $\vec{r}_f = \vec{r}(t_f)$ enden. Eins gehorcht den Bewegungsgleichungen und tritt in der Realität auf. Warum werden die anderen nicht realisiert?
Hinweis: betrachten wir $V(\vec{r})$ und $T = M\vec{v}^2/2$.

Für jeden möglichen Pfad (Bewegungsbahn) können wir $T(t)$ und $V(t)$ rechnen.
Es gibt Pfade, wobei $\int_{t_0}^{t_f} T(t')dt'$ größer oder kleiner ist.
Es gibt Pfade, wobei $\int_{t_0}^{t_f} V(t')dt'$ kleiner oder größer ist.
Aber wenn wir *alle möglichen Pfade* betrachten, hat der echte Pfad den minimalen Wert von:

$$\text{Wirkung:} \quad S \equiv \int_{t_0}^{t_f} \Big(T(\dot{\vec{r}}(t')) - V(\vec{r}(t')) \Big) dt' = \int_{t_0}^{t_f} \Big(\text{Lagrange'sche Funktion} \Big) dt'$$

Lagrange'sche Mechanik: Was???

Was soll ich machen, wenn ich $S = \int_{t_0}^{t_f} \Big(T - V\Big) dt'$ minimieren will?



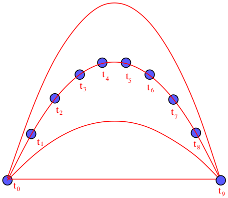
Wenn ich höher fliege, habe ich mehr V.
Aber um höher zu fliegen, muss ich weiter gehen.
Deshalb muss $T = M\vec{v}^2/2$ größer sein.
Um T zu minimieren, muss ich geradeaus mit beständiger Geschwindigkeit fliegen. Aber dann komme ich nicht hoch, und $-V$ ist zu groß.

Es braucht einen *Kompromiss*, S zu minimieren. Die echte Bewegungsbahn *ist genau* dieser Kompromiss! **Lagrange'sche Methode:**

- Benutzt Energie - wirklich $T - V$
- Benutzt Randbedingungen: $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t_f)$
- Richtige Bewegungsbahn *minimiert* Wirkung $S = \int_{t_0}^{t_f} (T - V) dt'$

Lagrange: Alle möglichen Parabole

Betrachten Sie zur Vereinfachung nur parabolische Bahnen:



Anfang, Endpunkt: $(0, 0, 0)$ und $(x_0, 0, 0)$.
Parabol, unbekannte Maximalhöhe:

$$\vec{r}(t) = \Big(x_0 t/t_f, 0, at(t_f - t)/2\Big)$$

Anfangsgeschwindigkeit $(x_0/t_f, 0, at_f/2)$
Beschleunigung: $-a$

Potentialenergie: $V = gMz = gMat(t_f - t)/2$.
Kinetische Energie: $T = M\vec{v}^2/2 = M((x_0/t_f)^2 + a^2(t - t_f/2)^2)/2$

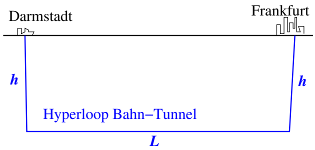
$$S = \int_0^{t_f} (T - V)dt' = \frac{Mx_0^2}{2t_f} + \frac{Ma^2 t_f^3}{24} - \frac{gMat_f^3}{12}$$

Minimieren in Bezug auf a: $$\frac{dS}{da} = 0 = \frac{Mat_f^3}{12} - \frac{gMt_f^3}{12} \quad \Rightarrow \quad a = g$$

Optimale Beschleunigung: $a = g$.

Wir brauchen neue mathematische Methoden. **Variationsrechnung**
Um die Methodologie zu entwickeln: Beispiel ohne Bezug dazu

Elon Musk kommt nach Darmstadt.
Er will einen **Hyperloop Zug**
zwischen Darmstadt und Frankfurt bauen.
Er will einen Tunnel ausgraben,
auspumpen, und mit Mag-Lev installieren.
Ein Zug fällt eine Tiefe h runter
Rollt ohne Reibung für eine Länge L
Dann schwingt er h nach oben
Und am Ende kommt er zum Halten.

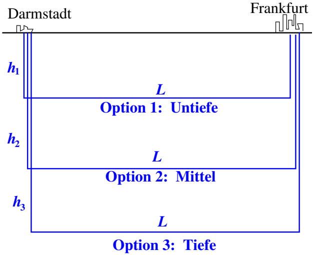


Wie tief soll unser Tunnel sein?
Preis ist kein Thema, wir wollen nur die kürzeste Gesamtfahrzeit.

Variationsrechnung: Tiefe

Zuerst betrachten wir einen einfachen Tunnel.

Der Tunnel hat zwei vertikale Abschnitte der Höhe h, und einen horizontalen Abschnitt der Länge L. Ich will die Fahrzeit über alle möglichen h-werte *optimieren*



Nicht tief genug: Zug fährt nicht schnell genug entlang.
Zu tief: Zug bracht zuviele Zeit, zu fallen!
Es muss eine optimale Tiefe h_{opt} geben!

Optimale Hyperloop Tiefe

Kein Motor, keine Reibung: Energieerhaltung. Geschwindigkeit, mit Tiefe d:

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -V \quad \Rightarrow \quad \frac{Mv^2}{2} = Mgd \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gd}$$

Zeit, vertikalen Abschnitt zu fallen:

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{vert}} = \sqrt{2h/g}$$

Zeit, horizontalen Abschnitt zu durchlaufen:

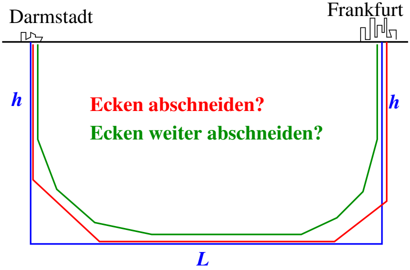
$$t_{\text{horiz}} = L/v = L/\sqrt{2gh}$$

Gesamtzeit:

$$t_{\text{ges}} = 2t_{\text{vert}} + t_{\text{horiz}} = \sqrt{8h/g} + \sqrt{L^2/2gh} \quad \text{optimal wenn} \quad h = L/4$$

Optimal: $h = L/4$ und $t_{\text{ges}} = \sqrt{8L/g}$ (30km in 2,5 Minuten! Paris in 10,3 Minuten!)

Aber das ist nicht optimal!

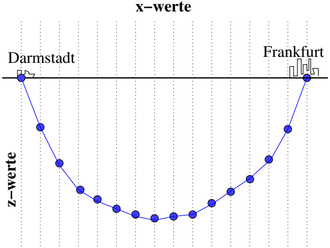


Unser Pfad hat Ecken.
Wir alle wissen, dass es besser ist, Ecken abzuschneiden!
Aber nur diagonale Abschnitte lassen auch Ecken. Wir müssen nach einer *Kurve* suchen.

2 Probleme:

- Wie *beschreibe* ich meine Kurve?
- Wie *optimiere* ich meine Kurve?

Problem, Formulieren



Ich *weiß*, dass x gleichmäßig zunimmt.
Die Frage ist, wie soll z sich ändern?
Auf jeden x-Wert zwischen $x = 0$ und $x = x_f$ brauche ich eine Tiefe $z(x)$.
Dann $z(x)$ definiert sich meine Kurve.

Die Weite zwischen den Punkten $(x_i, z(x_i))$ und $(x_{i+1}, z(x_{i+1}))$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta\ell &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z(x_{i+1}) - z(x_i))^2} \\
&= |x_{i+1} - x_i| \sqrt{1 + \left(\frac{z(x_{i+1}) - z(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} = \Delta x \sqrt{1 + (z')^2}
\end{aligned}$$

$\Delta t = \Delta\ell / v$ und $v = \sqrt{2gz(x)}$. Die gesamte Zeit ist

$$t_{\text{tot}} = \int_{x=0}^{x=x_f} \frac{d\ell}{v} = \int_{x=0}^{x=x_f} \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{2gz(x)}} dx$$

Variationsproblem

Ich suche eine Funktion $z(x)$, wobei

- $z(0) = 0$ und $z(x_f) = 0$
- Das Integral

$$t_{\text{tot}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{\sqrt{z}} dx$$

  minimiert ist.

Jacob Bernoulli stellte seinem Bruder 1697 dieses Problem zum ersten Mal. Um es zu lösen, entwickelte Johann einen neuen Unterzweig des Calculus.

Wir werden das Problem auf die folgende Form verallgemeinern:

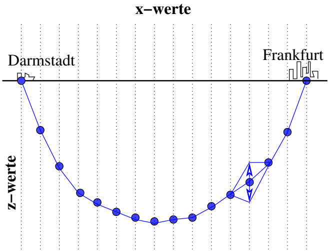
$$t_{\text{tot}} = \int_0^{x_f} F(z, z') dx\,.$$

Hier ist z unsere *unbekannte Funktion*, und F ist ein Ausdruck, der sowohl von z als auch von z' abhängt.

Einen Punkt zu ändern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Was passiert, wenn wir einen Punkt ändern?
Wird unsere Gesamtzeit höher oder niedriger sein?

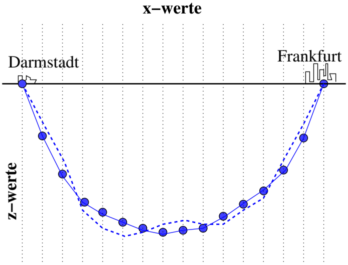


Wenn ich $z(x_i)$ ändere, ändert sich t_{tot}:
$z(x_i) = z_i + \Delta z$ und $t_{\text{tot}} = t_{\text{tot}}(\Delta z)$.
Es muss möglich sein, eine Taylorreihe für t_{tot}, als Funktion des $z(x_i)$, zu schreiben:

$$t_{\text{tot}} = t_{\text{tot}}(0) + \Delta z\ t'_{\text{tot}}(0) + \frac{(\Delta z)^2}{2} t''_{\text{tot}}(0) + \ldots$$

Wenn $t'_{\text{tot}}(0) \neq 0$, existiert ein kleiner Δz Wert, wobei $t_{\text{tot}}(\Delta z) < t_{\text{tot}}(0)$ gehorcht.
t_{tot} ist nur optimal, wenn $dt_{\text{tot}}/d(\Delta z) = 0$.

Allgemeine Variationen



Betrachten sie eine Funktion $z(x)$ und eine kleine, aber *willkürliche* Variation: $z(x) + \delta z(x)$. Hier muss $\delta z(x)$ *infinitesimal* sein und $\delta z(0) = 0 = \delta z(x_f)$.
Aber außerdem ist δz “was Sie wollen.”

$z(x)$ ist *optimal* genau dann, wenn $t_{\text{tot}}(z + \delta z) = t_{\text{tot}}(z)$ bis zur zweiten Ordnung.

Vorsicht: $t_{\text{tot}} = \int_0^{x_f} F(z(x), z'(x))dx$ hängt ab von z *und* z'.
Wenn $z(x) \to z(x) + \delta z(x)$, denn auch $z'(x) \to z'(x) + \delta z'(x)$.

Variationsprinzip

Für unser Problem

$$
\begin{aligned}
t_{\text{tot}} &= \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1+(z'+\delta z')^2}}{\sqrt{2g(z+\delta z)}}\, dx \\
\delta t_{\text{tot}} &\simeq \int_0^{x_f} \left(\delta z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}} + \delta z' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}} \right) dx \\
&= \int_0^{x_f} \left(\frac{-\delta z \sqrt{1+z'^2}}{2z\sqrt{2gz}} + \frac{\delta z' \; z'}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} \right) dx
\end{aligned}
$$

Hier muss ich δz und $\delta z'$ als *unabhängige* Variablen behandeln.
Aber $\delta z' = \left(\frac{d}{dx}\delta z\right)$. Partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{x_f} \left(\frac{d}{dx}\delta z \right) \left(\frac{z'}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} \right) dx \\
= \quad & \delta z \left(\frac{z'}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=x_f} \\
& - \int_0^{x_f} \delta z \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} \right) dx
\end{aligned}
$$

Allgemein

$$
\begin{aligned}
t_{\text{tot}} &= \int_0^{x_f} F(z+\delta z, z'+\delta z') dx \\
\delta t_{\text{tot}} &\simeq \int_0^{x_f} \left(\delta z \frac{\partial}{\partial z} F(z,z') + \delta z' \frac{\partial}{\partial z'} F(z,z') \right) dx
\end{aligned}
$$

Hier muss ich δz und $\delta z'$ als *unabhängige* Variablen behandeln.
Aber $\delta z' = \left(\frac{d}{dx}\delta z\right)$. Partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{x_f} \left(\frac{d}{dx}\delta z \right) \frac{\partial F(z,z')}{\partial z'} dx \\
= \quad & \delta z \frac{\partial F(z,z')}{\partial z'} \Bigg|_{x=0}^{x=x_f} \\
& - \int_0^{x_f} \delta z \frac{d}{dx} \frac{\partial F(z,z')}{\partial z'} dx
\end{aligned}
$$

Errinern Sie sich: $\delta z(0) = 0 = \delta z(x_f)$.
Deshalb finden wir:

$$\delta t_{\text{tot}} = \int_0^{x_f} \delta z \left(\frac{-\sqrt{1+z'^2}}{2z\sqrt{2gz}} - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} \right) dx = 0$$

oder im Allgemeinen:

$$\delta t_{\text{tot}} = \int_0^{x_f} \delta z \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, z') - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial z'} F(z, z') \right) dx = 0$$

ABER δz ist *willkürlich*.
δt_{tot} ist nur *automatisch* null, wenn der Ausdruck in Klammern = 0 ist!

$$\text{Wir finden:} \quad \frac{\partial}{\partial z} F(z, z') = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial z'} F(z, z') \qquad \forall x \in [0, x_f]\,.$$

Für unser Problem finden wir nach viel Algebra: $1 + z'^2 + 2zz'' = 0$.

Hyperloop: Zykloide

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unser Tunnel soll $z = z(x)$ gehorchen, mit

$$0 = 1 + (z')^2 + 2zz''$$

Die Lösung (nein, das ist nicht trivial!) ist:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_f\,(\theta - \sin\theta)\,/2\pi\,, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) &= x_f\,(1 - \cos\theta)\,/2\pi \\ t &= \theta\sqrt{x_f/2\pi g}\,, \\ t_{\text{tot}} &= \sqrt{2\pi x_f/g} \end{aligned}$$

Kürzer als $\sqrt{8x_f/g}$. Diese Kurve heißt die Zykloide.

Was hat das mit Lagrange zu tun?

Was hat das alles mit Lagrange und $\vec{r}(t)$, $T - V$ zu tun?
Noch nichts. Aber:

- Variable $x \to t$ – t-Abhängigkeit
- Unbekannte Kurve $z(x) \to \vec{r}(t)$
- Funktion $F(z, z') \to L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T - V$

die gleichen mathematischen Methoden lassen uns Bewegungsgleichungen rechnen.
Das machen wir in Vorlesung 6.

Summary in English

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

The actual path a particle takes, starting at $\vec{r}_i$ at $t = t_i$ and ending at $\vec{r}_f$ at $t = t_f$, is the path which minimizes the **Action**

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (T - V)\, dt = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt$$

where $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ is the Lagrangian or Lagrange function.
A beautiful extremization problem is constructing the Hyperloop Train:

$$z = z(x) \quad \text{minimizes} \quad t_{\text{tot}} \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{2gz}} dx = \int_0^{x_f} F(z, z') dx$$

with boundary values $z(0) = 0 = z(x_f)$. By considering $z \to z + \delta z$, the value is extremized when

$$0 = \delta t_{\text{tot}} = \int_0^{x_f} \delta z \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, z') - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial z'} F(z, z') \right) dx$$

where $F(z, z')$ is treated formally as a function of the two independent variables z, z'. For the case of the Hyperloop, the solution is a cycloid.