Wir brauchen ein weiteres Beispiel für Minimierung.
Dann wenden wir den Ansatz auf die klassische Mechanik an.

- Minimieren: Lagrange'scher Multiplikator
- Minimieren: Mehrkomponente Funktionen
- $T - V$ Minimieren $\rightarrow$ Newton'sche Gleichungen
- andere (generalisierte) Koordinaten sind auch erlaubt!
- Generalisierte Koordinaten: Beweis

## Lagrange'scher Multiplikator (1)



**Problem: wie hängt eine Kette?**

Eine Kette mit Länge $L$ hängt unter Schwerkraft zwischen zwei Haken.
Die Enden sind auf $(x_i, z_i)$ und $(x_f, z_f)$.
Die Kette hat eine Masse pro Längeneinheit: $\mu = dM/d\ell$.
Wie hängt die Kette? (Was ist $z = z(x)$?)

Potentialenergie $V = \int gz\mu d\ell$, wobei $d\ell = \sqrt{1 + z'^2}dx$
**aber** die Gesamtlänge muss $L$ sein: $\int d\ell = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + z'^2}dx = L$.

$$\text{Was wir minimieren müssen:} \quad \int_{x_i}^{x_f} \left( gz\mu\sqrt{1 + z'^2} + \text{Etwas} \right) dx$$

wobei "Etwas" etwas extra ist, um die Gesamtlänge zu kontrollieren.
Was ist "Etwas"?

# Lagrange'scher Multiplikator (2)



Ich muss einen "Preis" pro Längeneinheit angeben. Aber wie "teuer"?
Weiß ich nicht – nennen wir es $\lambda$ (den **Lagrange'schen Multiplikator**)

$$\text{Was wir minimieren müssen:} \quad \int_{x_i}^{x_f} \left( gz\mu\sqrt{1+z'^2} - \lambda\sqrt{1+z'^2} \right) dx$$

wobei $\int -\lambda\sqrt{1+z'^2}dx = -\lambda L$. Am Ende werden wir $\lambda$ auswählen.

Minimieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left((gz\mu - \lambda)\sqrt{1+z'^2}\right) &= \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial z'}\left((gz\mu - \lambda)\sqrt{1+z'^2}\right) \\
g\mu\sqrt{1+z'^2} &= \frac{d}{dx}\frac{(g\mu - \lambda)z'}{\sqrt{1+z'^2}} \\
\text{nach viel Algebra...} \quad (z - \lambda/\mu)z'' &= 1 + z'^2 \,.
\end{aligned}$$

# Lagrange'scher Multiplikator (3)

Wie lösen wir: $(z - \lambda/\mu)z'' = 1 + z'^2$?
Nicht linear, nicht homogen ... man braucht Glück.
Bemerkung: $\cosh(x)' = \sinh(x)$ und $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$ und $\cosh(x)'' = \cosh(x)$...

$$\textbf{Ansatz:} \quad z(x) = \frac{\lambda}{\mu} + b\cosh\frac{x - x_0}{b} \qquad \textit{“Kettenlinie”}$$

$z' = \sinh\frac{x-x_0}{b}$ und $z'' = b^{-1}\cosh\frac{x-x_0}{b}$.
$z(x)$ *ist* eine Lösung, und hat 2 unabhängige Koeffizienten.
Wir haben die allgemeine Lösung gefunden!!

Für jede Kombination $(x_i, x_f, L)$ gibt es eine Kombination $(\lambda, b, x_0)$ ...
Unser *Lagrange'scher Multiplikator* $\lambda$ ermöglicht es uns, die Auswirkungen einer Beschränkung in unsere Analyse einzubeziehen. Sein Wert muss am Ende so bestimmt werden, dass die Beschränkung eingehalten wird.

# Noch ein Thema zur Minimierung



Was passiert, wenn $y(x), z(x)$ beide $x$-abhängig sein müssen?

$$\text{Was wir minimieren wollen:} \qquad S = \int_{x_i}^{x_f} F(y, z; y', z') dx$$

$S$ nimmt seinen Minimalwert, wenn $y(x) \to y(x) + \delta y(x)$ *und* $z(x) \to z(x) + \delta z(x)$ $S$ unverändert in linearer Ordnung belassen wird.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{x_i}^{x_f} \Big( F(y + \delta y, z + \delta z; y' + \delta y', z + \delta z') - F(y, z; y', z') \Big) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_f} \left( \delta y \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial y} + \delta z \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial z} + \delta y' \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial y'} + \delta z' \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial z'} \right) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_f} \left( \delta y \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] + \delta z \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \right) dx
\end{aligned}$$

$\delta y$ und $\delta z$ sind jeweils willkürlich. Daher muss:

$$\frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial y'} \quad \textbf{und auch} \quad \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial z} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, z; y', z')}{\partial z'}$$

# Zurück zur Mechanik



Warum haben wir 1,5 Vorlesungen über Minimierung gesprochen?

**Wir vermuten / glauben / spekulieren / denken, dass die Wirkung minimiert ist**.
Das heißt, wir glauben, dass die tatsächliche Trajektorie diejenige ist, die die Wirkung minimiert.

Jetzt haben wir den mathematischen Apparat, um dies zu testen.

# Variationsrechnung mit Lagrangefunktion

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

**Ich glaube, dass Wirkung minimiert ist.**
**Entspricht das der Newton'sche Mechanik?**

Betrachten Sie ein Teilchen mit:

$$L = T - V = \frac{M}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - V(\vec{r})$$

$t$ ist unsere Variable (wie $x$ in unseren Beispielen)
$\vec{r}(t)$ ist unsere unbekannte Funktion (3 Komponenten!)
$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ist unser $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$-abhängiger Ausdruck

Was wir minimieren wollen: $S \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\, dt$

(mit Randbedingungen: $\vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$, $\vec{r}(t_f) = \vec{r}_f$)

# Variation der Wirkung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \dot{z}^2 - V(x, y, z) \right) dt$$

Gleiche Methoden wie in Vorlesung 5, aber jetzt für $r_x, r_y, r_z = x, y, z$:

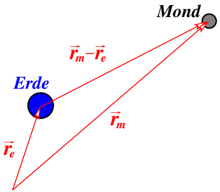
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad M \frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad M \frac{d^2}{dt^2} y = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad M \frac{d^2}{dt^2} z = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

**AHA!!!** $\quad M \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V = \vec{F}$ **Newton II**

*Die Extremisierung der Wirkung und die Newtonsche Mechanik sind äquivalent!*

# Mehrere Teilchen? Aber natürlich!






Erde und Mond:

$$L = T - V = \frac{M_e}{2}\dot{\vec{r}}_e^2 + \frac{M_m}{2}\dot{\vec{r}}_m^2 + \frac{G_N M_e M_m}{|\vec{r}_e - \vec{r}_m|}$$

Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{e,i}} = \frac{\partial L}{\partial r_{e,i}} \quad \Rightarrow \quad M_e \ddot{r}_{e,i} = -\frac{G M_e M_m (r_{e,i} - r_{m,i})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_m|^3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{m,i}} = \frac{\partial L}{\partial r_{m,i}} \quad \Rightarrow \quad M_m \ddot{r}_{m,i} = -\frac{G M_e M_m (r_{m,i} - r_{e,i})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_m|^3}$$

wie erwartet. Hier ist $i = (1, 2, 3)$ (6 Gleichungen oder 2 Vektorgleichungen)

Im Folgenden werde ich die Indexnotation und die Einstein-Summierungskonvention verwenden: $r_{m,i}^2 \equiv \sum_i r_{m,i}^2$....

# Generalisierte Koordinaten?



Die Bewegungsgleichungen sind kompliziert, weil $r_e$, $r_m$, $r_e - r_m$ alle gemischt sind. Ist die Physik einfacher zu sehen, wenn wir mit $r_{s,i}$ und $r_{r,i}$ arbeiten?

$$r_{s,i} \equiv \frac{M_e r_{e,i} + M_m r_{m,i}}{M_e + M_m}\,, \quad r_{r,i} = r_{m,i} - r_{e,i}$$

Wir können für $r_{e,i}$, $r_{m,i}$ lösen:

$$r_{e,i} = r_{s,i} - \frac{M_m}{M_e + M_m} r_{r,i}\,, \qquad r_{m,i} = r_{s,i} + \frac{M_e}{M_e + M_m} r_{r,i}$$

und

$$\begin{aligned} M_e \dot{r}_{e,i}^2 + M_m \dot{r}_{m,i}^2 &= M_e \left( \dot{r}_{s,i} - \frac{M_m}{M_e + M_m} \dot{r}_{r,i} \right)^2 + M_m \left( \dot{r}_{s,i} + \frac{M_e}{M_e + M_m} \dot{r}_{r,i} \right)^2 \\ &= (M_e + M_m)(\dot{r}_{s,i})^2 + \frac{M_e M_m}{M_e + M_m} (\dot{r}_{r,i})^2 \end{aligned}$$

Wir nennen $M_e + M_m = M$ (Gesamtmasse) und $M_e M_m / M \equiv \mu$ (reduzierte Masse)

Ich kann $L$ als Funktion von $r_{s,i}$ und $r_{r,i}$ schreiben:

$$L = \frac{M}{2}\dot{r}_{s,i}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{r}_{r,i}^2 + \frac{G_N M_m M_e}{\sqrt{r_{r,i}^2}} .$$

Aber kann ich $r_{s,i}$ und $r_{r,i}$ als Koordinaten benutzen und Lagrange'sche Methoden benutzen? Wir probieren, das zu machen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{s,i}} = \frac{\partial L}{\partial r_{s,i}} \quad \Rightarrow \quad M\ddot{r}_{s,i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{r,i}} = \frac{\partial L}{\partial r_{r,i}} \quad \Rightarrow \quad \mu\ddot{r}_{r,i} = -\frac{G_N M_m M_e r_{r,i}}{|r_r|^3}$$

Diese Gleichungen ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen für $r_e$ und $r_m$ (nach viel Algebra). Das heißt – sie stimmen.
Bemerkung: $r_s$-Bewegung ist trivial. $r_r$-Bewegung ist $r_s$-unabhängig.
Warum? Weil $L = L_s + L_r$ und $L_s$ so einfach ist.

# Darf ich Kugelkoordinaten benutzen?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Warum nicht? $\vec{r}_s$ Kartesische Koord. aber $\vec{r}_r$ in Kugelkoordinaten.
Nach viel Arbeit (Rechenmethoden)

$$L = T - V = \frac{M\dot{r}_{s,i}^2}{2} + \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right) + \frac{G_N M_e M_m}{r}$$

$\delta r$-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \Rightarrow \quad \mu r(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2) - \frac{G_N M_e M_m}{r^2} = \mu\ddot{r}$$

Vorsicht! $T = T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ ist $r, \theta$-abhängig – *nicht nur* von den "Geschwindigkeiten" abhängig!
Die anderen 2 Gleichungen sind:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \mu r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 = \mu\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mu\frac{d}{dt}r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}$$

# Zentralkraft mit Kugelkoordinaten



Wir werden (natürlich) noch viel mehr zu diesen Ausdrücken zu sagen haben. Aber ein paar Kommentare:

- Es ist noch nicht klar, ob diese Gleichungen richtig sind!
  Wir können sie aber überprüfen, indem wir Kartesische Gleichungen schreiben, $(x, y, z)$ als Funktionen von $(r, \theta, \varphi)$ umschreiben, und unendlich viel Algebra machen.
  Und am Ende stimmen sie.
- Die Gleichungen in Kugelkoordinaten sehen komplizierter aus als in Kartesische Koordinaten – aber sind einfacher zu lösen!
- Nur eine Gleichung ist $V(r)$-abhängig.
- Die letzte Gleichung ist $\frac{d}{dt}(r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}) = 0$. Deshalb ist $r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}$ eine *Erhaltungsgröße*.

# Generalisierte Koordinaten



Was wir gemacht haben:

1. Neue Koordinaten $q_i(r_1, ... r_{3N})$ gefunden
2. $r_i, \dot{r}_i$ im Form $r_i = r_i(q_j)$, $\dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$ umgeschrieben
3. Dadurch $L = T - V$ als Funktion von $(q_j, \dot{q}_j)$ umgeschrieben
4. $L$ über $q_j \rightarrow q_j + \delta q_j$ minimiert.

Wie kann ich *absolut sicher* sein, dass das alles erlaubt ist?

Ist es! Braucht aber ein bisschen Arbeit....

# Koordinatenänderung: Formulierung



Betrachten Sie ein System mit (Kartesische) Koordinaten $r_i$ und Lagrangefunktion $L(r, \dot{r})$. Wir wissen schon, dass

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{r}_i = F_i \quad \textbf{Newton II}$$

Betrachten Sie neue generalisierte Koordinaten:

$$q_1, \dots q_{3N} \quad \text{mit} \quad r_i = r_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad \text{(kann } t\text{-abhängig sein)}$$

Wir können $L$ umschreiben:

$$L(r, \dot{r}) = L\left(r(q,t), \tfrac{d}{dt} r(q,t)\right)$$

Hmmm... was ist $dr(q,t)/dt$??

$$\frac{d}{dt} r_i(q,t) = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad \text{und deshalb:} \quad \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

# Koordinatenänderung: Beweis



Betrachten wir zuerst $\partial L/\partial q_j$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_j} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)
\end{aligned}
$$

Und $\partial L/\partial \dot{q}_j$ ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\cancelto{0}{\frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_j}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right)
\end{aligned}
$$

Der Unterschied ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) \\
&= \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\left( \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = 0 \quad \textbf{Euler-Lagrange Gleichungen}
\end{aligned}
$$

# What have we learned?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

You can apply a minimization procedure on multiple functions (or a multi-dimensional function). The result, using $t$ as the variable and $r_i$ as the functions:

$$\text{minimum of} \quad S = \int_{t_i}^{t_f} F(r_i, \dot{r}_i) dt \quad \text{occurs when} \quad \frac{\partial F}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{r}_i}$$

If there is an additional requirement, such as a fixed-length requirement, it can be included by use of a Lagrange multiplier:

$$\text{find minimum of:} \quad S' = \int_{t_i}^{t_f} F(r_i, \dot{r}_i) - \lambda A(r_i, \dot{r}_i) dt$$

---

Extremizing the Lagrangian $L(r, \dot{r}) = T - V$ leads to Newton's equations:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V = \vec{F}$$

However, the Lagrangian approach has the advantage that we can transform from Cartesian coordinates into any other coordinate system we choose. We have proven that extremization in terms of some $q_i$ coordinates gives the same physics as in terms of the original Cartesian coordinates.