Theoretische Physik I:

d’Alembertsprinzip, Lagrange II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Das letzte Mal haben wir uns die Lagrange-Methode angesehen.
Sie entspricht der Newtonschen Methode,
wenn es keine Zwangsbedingungen gibt.

Und wenn es Zwangsbedingungen gibt?

- Virtuelle Verrückungen
- d’Alembertsprinzip
- Zwangsbedingungen und Lagrange’sche Methode
- Zwangsbedingungen+Lagrange+generalisierten Koordinaten: eine *killer combination*

Wo sind wir?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bereits diskutiert:

- Newton'sche Methode (Wiederholung)
- Zwangsbedingungen und Zwangskräfte
- Wirkung ist minimiert $\leftrightarrow$ Newton'sche Methode
- Variationsrechnung, Lagrange'sche Methode
- generalisierte Koordinaten in Lagrange'sche Methode

Noch nicht diskutiert:

- Zwangsbedingungen **in** Lagrange'sche Methode??
- Wie generalisierte Koordinaten + Zwangsbedingungen zusammen funktionieren (sehr gut!)
- Beispiele, bei denen die Lagrange'sche Methode viel besser ist!

Das machen wir diese Woche.
Dann werden wir den Zweck der Lagrange-Methoden verstehen.

Lagrangefunktion + Zwangsbedingungen??

Wir haben schon gesehen: Ohne Zwangsbedingungen,

$$
\begin{aligned}
L &= T - V = \frac{M}{2}\dot{r}^2 - V(r)\,, \\
S &= \int_{t_i}^{t_f} L(r,\dot{r})dt \qquad \text{soll man minimieren} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad M\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = F
\end{aligned}
$$

Ohne Zwangsbedingungen und Zwangskräfte sind Lagrange, Newton equivalent!
Aber stimmt das immer noch mit Zwangsbedingungen und Zwangskräften?
In diesem Fall lauten die Newton'schen Gleichungen:

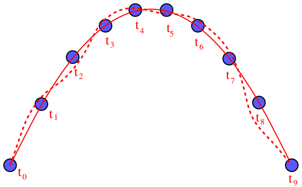
$$
M\ddot{r}_i = -\frac{\partial V}{\partial r_i} + Z_i
$$

wobei Z_i Zwangskräfte sind.
Wie können Lagrangemethoden die Zwangskräfte korrekt reproduzieren?

Virtuelle Verrückungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

In Lagrangemethoden betrachte ich alle *möglichen* Bewegungsbahnen.
Welche sind möglich? Muss ich enger betrachten!



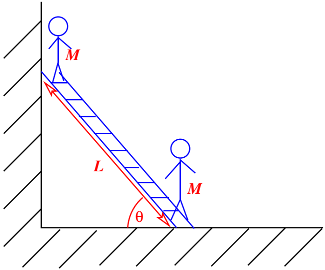
Wenn ich einen Ball in die Luft werfe,
gibt es die echte Bewegungsbahn $\vec{r}(t)$,
und die modifizierte Bewegungsbahn $\vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)$

Die modifizierte Bewegungsbahn passiert nicht wirklich, aber wir müssen sie berücksichtigen, um die Variationsrechnung zur Berechnung von $\vec{r}(t)$ zu verwenden.

Wir *nennen* den Unterschied $\delta\vec{r}(t)$
die **virtuellen Verrückungen** der Bewegungsbahn.
Ich soll *alle möglichen* virtuellen Verrückungen betrachten.

virtuellen Verrückungen: Variationen, wenn was sich ändert ist ein Pfad durch Zeit

System mit Zwangsbedingungen



Ich steige auf eine Leiter, Länge L, Winkel θ
Mein Bruder steht auch auf der Leiter
Jeder hat Masse M
Die Leiter rutscht ohne Reibung (SCHLECHT!)
Näherung: wir sind Punktmassen
Einer an der Wand, einer auf dem Boden
$M \gg m_{\text{Leiter}}$

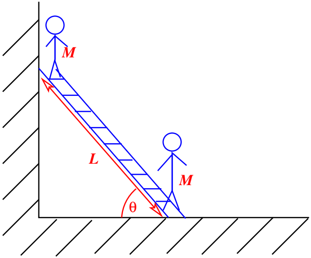
Mein Bruder und ich haben jeder 2 Koordinaten: (x_1, z_1) und (x_2, z_2).
Was sind die Zwangsbedingungen?

- $x_1 = 0$ (Leiter lehnt an der Wand)
- $z_2 = 0$ (Leiter steht auf dem Boden)
- $(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0$ (Leiterlänge)

Was sind die *virtuellen Verrückungen*?

Virtuelle Verrückungen, Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Meine Koordinaten: (x_1, z_1)
Mein Bruder: (x_2, z_2)
Zwangsbedingungen:

- $x_1 = 0$
- $z_2 = 0$
- $(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0$

die virtuellen Verrückungen *müssen die Zwangsbedingungen respektieren.*
$\delta x_1 = 0$, $\delta z_2 = 0$, und ...

$$0 = \delta\left((x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2\right) = 2(x_1 - x_2)\delta x_1 - 2(x_1 - x_2)\delta x_2 + 2(z_1 - z_2)\delta z_1 - 2(z_1 - z_2)\delta z_2$$

$$\text{Aber } x_1 = \delta x_1 = 0 \text{ und } z_2 = \delta z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2\delta x_2 + 2z_1\delta z_1 = 0$$

Es gibt nur eine virtuelle Verrückung: $\delta\theta$, und $\delta z_1 = L\cos(\theta)\,\delta\theta$, $\delta x_2 = -L\sin(\theta)\,\delta\theta$.

Virtuelle Verrückungen, Kraft

Betrachten Sie Koordinaten $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$, Zwangsbedingungen $f_1(\vec{r}_1, ..), \ldots, f_k(\vec{r}_1, ..)$
Die virtuellen Verrückungen müssen die Zwangsbedingungen respektieren:

$$f_s(\vec{r} + \delta r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Die virtuellen Verrückungen sind *senkrecht* zu allen Normalrichtungen.
Die Kraft hat zwei Komponenten: aus der Potentialenergie und Zwangskraft:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(r_1, \ldots) + \vec{Z}_i \,, \qquad Z_i = \sum_s z_s \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} f_s$$

Wie wirken die Normalkräfte auf die virtuellen Verrückungen?

$$\sum_i \delta \vec{r}_i \cdot \vec{Z}_i = \sum_i \sum_s z_s \delta r_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} f_s = \sum_s z_s \cancelto{0}{\left(\sum_i \delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} f_s \right)} = 0$$

Zwangskraft, Virtuelle Verrückungen

Zwangskräfte zeigen in Normalrichtungen.
Die virtuellen Verrückungen sind senkrecht zu allen Normalrichtungen.

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i &= \vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(r_1, ...) + \vec{Z}_i \qquad \textbf{Newton II} \\
Z_i &= M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i + \vec{\nabla}_i V \qquad \text{Zwangskraft} \\
0 &= \sum_i \delta\vec{r}_i \cdot \vec{Z}_i \qquad \text{letzte Folie} \\
0 &= \sum_i \delta\vec{r}_i \cdot \left(M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i + \vec{\nabla}_i V(r_1, ...) \right) \qquad \text{d'Alembertsprinzip}
\end{aligned}
$$

d'Alembertsprinzip: Die Summe der Differenzen zwischen den auf ein System von Massenteilchen wirkenden Kräften und den zeitlichen Ableitungen der Impulse, projiziert auf jede mit den Zwangsbedingungen des Systems übereinstimmende virtuelle Verschiebung, ist null. (Newton III ist in allen Richtungen, in die sich das System bewegen darf, erfüllt.)

d'Alembertsprinzip: Interpretation

Es gibt Richtungen, die wegen Zwangsbedingungen nicht erlaubt sind.
In diese Richtungen gibt es keine virtuellen Verrückungen.
In die anderen Richtungen (senkrecht zu allen Zwangsbedingungen) gibt es keine Zwangskräfte, und $M\ddot{r} = -\nabla V$ wie immer.

Oder: Die Zwangsbedingungen werden in der Lagrange'schen Mechanik dadurch erzwungen, dass virtuellen Verrückungen, die den Zwangsbedingungen nicht gehorchen, nicht zugelassen werden.

Generalisierte Koordinaten

Betrachten Sie ein System mit $3N$ Koordinaten und k Zwangsbedingungen:
$f_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$, $s = 1, \dots, k$.
Wenn wir sehr klug sind, können wir neue Koordinaten
$q_1, \dots, q_{3N-k}; q_{3N-k+1}, \dots q_{3N}$ finden, wobei die Zwangsbedingungen sind:

$$f_s(q_1, \dots, q_{3N}) = q_{3N+1-s} = 0 \quad \text{(oder Konstante } K_s\text{)}$$

Das heißt, die Koordinaten q_{3N-k+1} bis q_{3N} sind alle immer 0 (oder konstant).
Die andere Koordinaten sind frei: wir müssen δq_i, $i \in \{1, \dots, 3N - k\}$ betrachten.

Die q_i sind besser, um die virtuellen Verrückungen zu finden:

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_{3N-k}) \quad \Rightarrow \quad \delta r_i = \sum_{\ell=1,\dots,3N-k} \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \delta q_\ell$$

zeigt automatisch nur in erlaubte Richtungen.

d'Alembert und Lagrange II

d'Alembert: Kartesische Koord r_i $\qquad 0 = \sum_i \delta r_i \left(m_i \ddot{r}_i + \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$

Wir *vermuten*, dass das equivalent zum Lagrange II ist:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad \Rightarrow 0 = \delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} L\Big(q(t), \dot{q}(t)\Big)\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{\partial L}{\partial q_\ell}$$

Das ist aber in *generalisierte Koordinaten.*
Sind sie gleich? Wir machen, was mann nie in einer Vorlesung machen soll:
eine Herleitung. Wir werden brauchen:

$$\delta r_i = \sum_{\ell=1}^{3N-k} \delta q_\ell \, \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\ell} \, .$$

Herleitung I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten Sie zuerst, was wir hoffen, zu finden: $\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_\ell} = 0$.

Bemerkung: $T(r,\dot{r}) = m\dot{r}^2/2$ aber $r = r(q)$ ist nicht trivial.

Deshalb ist $T(q,\dot{q})$ wirklich ein Funktion von $\dot{q}_j$ **und** q_j, nicht nur $\dot{q}_j$.

zum Beispiel: Polarkoordinaten $\quad \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

Wir fangen an, mit was wir finden wollen, und arbeiten rückwärts:

Betrachten Sie $\quad \sum_\ell \delta q_\ell \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial T(q,\dot{(q)})}{\partial q_\ell} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_\ell}\right)$

$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{r}_i^2$ benutzen $\quad \sum_\ell \delta q_\ell \left(\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial m\dot{r}_i^2/2}{\partial \dot{q}_\ell} - \sum_i \frac{\partial m\dot{r}_i^2/2}{\partial q_\ell} + \frac{\partial V}{\partial q_\ell}\right)$

Kettenregel $\quad \sum_{i,\ell} \delta q_\ell \left(\frac{d}{dt} m\dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\ell} - m\dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\ell} + \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell}\partial V \partial r_i\right)$

Wir brauchen.. $\quad \sum_{i,\ell} \delta q_\ell \left(\frac{d}{dt} m\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} - m\dot{r}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} + \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial V}{\partial r_i}\right)$

Herleitung II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\text{Letzte Folie:}\quad \sum_{i,\ell} \delta q_\ell \left(\frac{d}{dt} m\dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} - m\dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} + \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$$

Aber $\frac{d}{dt}(AB) - A\frac{d}{dt}B = B\frac{d}{dt}A$:

$$\text{Wir betrachten:}\quad \sum_{i,\ell} \delta q_\ell \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \frac{d}{dt} m\dot{r}_i + \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$$

$$\text{Umorganisieren:}\quad \sum_i \left(\sum_\ell \delta q_\ell \frac{\partial r_i}{\partial q_\ell} \right) \left(m\ddot{r}_i + \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$$

$$\text{Verrückungen in Gen Koord}\quad \sum_i \delta r_i \left(m\ddot{r}_i + \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$$

$$\text{d'Alembert!}\quad = 0$$

d'Alembert $\Rightarrow$ Lagrange II stimmt auch mit Zwangsbedingungen.

Lagrange II: Zusammenfassung

Mit $3N$ Koordinaten und k Zwangsbedingungen:

1. Finden Sie generalisierte Koordinaten, bei denen die Zwangsbedingungen die Form $q_{3N-k+1} = 0 = ... = q_{3N}$ haben;
2. Schreiben Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{r}, r)$ in die neuen Koordinaten um;
3. Minimieren Sie in Bezug auf die erlaubten virtuellen Verrückungen δq_i, $i = 1, \ldots 3N - k$
4. Die ermittelten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_j}$$

sind äquivalent zur Newtonschen Mechanik mit Normalkräften.

Äquivalent aber einfacher: Zwangsbedingungen sind automatisch erfüllt, Normalkräfte muss man nicht rechnen.

Summary in English

When minimizing over all paths, which paths should we consider?
Only those paths which obey the constraints.
The variation δr_i should then be kept orthogonal to the constraint directions. But the normal forces lie in these directions, so $\sum_i \delta r_i \cdot Z_i = 0$.
This leads to **d'Alembert's Principle**:

$$\sum_i \delta r_i \left(M\ddot{r}_i + \nabla_i V \right) = 0$$

In a system with $3N$ coordinate components and k constraints, one can choose *generalized coordiantes* with one coordinate forced to 0 for each constraint, leaving $3N - k$ relevant coordinates q_j. Only these q_j have virtual motions.
The Lagrangian $L(q, \dot{q}) = T - V$ can be expressed in terms of these generalized q_i, and **Lagrange II** consists of extremizing with respect to these coordinates:

$$\text{Euler-Lagrange equations:} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_j}$$

are equivalent to **Newton II**, but easier to use.