Theoretische Physik I:

Vorlesung 8: Lagrange II Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

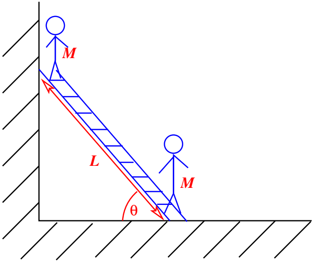
Jetzt haben wir eine neue Methode:

- Generalisierte Koordinaten finden
- Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ schreiben
- Euler-Lagrange Gleichungen ausrechnen
- Lösen, oder die Eigenschaften lernen

Wir sollen mehrere Beispiele geben...

In Moment *finden* wir die Bewegungsgleichungen – wir *lösen* sie noch nicht.

Beispiel 1: Leiter



Zwei Leute, jeder mit Masse M,
stehen auf einer Leiter.
Die Leiter rutscht ohne Reibung.

Koordinaten $(x_1, z_1), (x_2, z_2)$
Zb: $x_1 = 0$, $z_2 = 0$, $x_2^2 + z_1^2 - L^2 = 0$
Potentialenergie: $V = gMz_1$

Wir benutzen als generalisierte Koordinate: θ
$z_1 = L\sin(\theta)$, $x_2 = L\cos(\theta)$, $\dot{z}_1 = L\cos(\theta)\dot{\theta}$, $\dot{x}_2 = -L\sin(\theta)\dot{\theta}$,

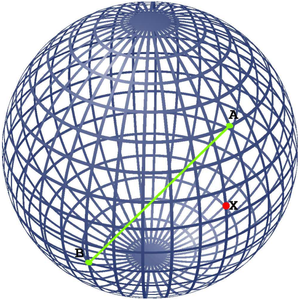
$$L = T - V = \frac{M}{2}\left(\dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - gMz_1 = \frac{ML^2}{2}\dot{\theta}^2 - gML\sin(\theta)$$

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad ML^2\ddot{\theta} = -gML\cos\theta \qquad \text{Fertig!}$$

Beispiel 2: Punkt auf der Erde (Kugel)

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Ein Objekt bewegt sich ohne Reibung über die Oberfläche der Erde.
Das Objekt hat Masse m.
Die Schwerkraft hält es auf der Oberfläche:
$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Koordinaten: (r, θ, φ), mit $r = R$ (Zwangsbedingung): 2 Koordinaten (θ, φ)

$$
\begin{aligned}
x &= R\sin(\theta)\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = R\cos(\theta)\cos(\varphi)\dot{\theta} - R\sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\
y &= R\sin(\theta)\sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = R\cos(\theta)\sin(\varphi)\dot{\theta} + R\sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\
z &= R\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -R\sin(\theta) \\
v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Punkt auf der Erde II

Lagrangefunktion:

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right)$$

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2$$

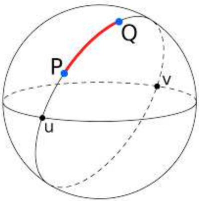
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} = 0 = \sin^2(\theta)\,\ddot{\varphi} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}$$

Längenlinie: Wenn $\dot{\varphi} = 0$ finden wir $\ddot{\theta} = 0$ und $\ddot{\varphi} = 0$:
$\theta = \theta_0 + v_\theta t$. Unser Objekt bewegt sich entlang einer Längenlinie.

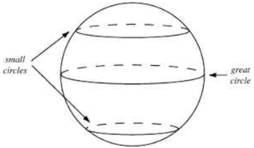
Breitenlinie?? Wenn $\dot{\theta} = 0$ finden wir $\ddot{\varphi} = 0$, aber $\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2$.
Außer im Fall des Äquators ($\theta = \pi/2$) ändert sich θ mit der Zeit. Breitenlinien sind *nicht* Lösungen.

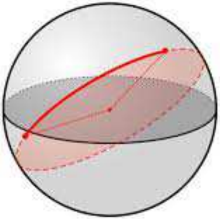
Erklärung: Großkreise

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



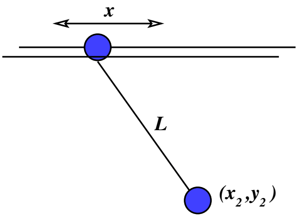
Eine “gerade Linie” auf einer Kugel ist ein Großkreis. Die Längengrade sind Großkreise, aber die Breitengrade sind es nicht.





Deshalb fliegen Flugzeuge oft weiter nördlich als der Start- und Endpunkt ihres Fluges.

Beispiel 3: Rollpendel



Rollpendel wie vorher:
Eine Kugel rollt ohne Reibung auf 2 Stangen.
Ein Pendel hängt unten.
Die Massen sind M_1 und M_2.
Koordinaten: $(x_1, z_1), (x_2, z_2)$
Zwangsbedingungen: $z_1 = 0$,
$(x_1 - x_2)^2 + z_2^2 - L^2 = 0$

generalisierte Koordinaten: x_1 und θ:

$$x_2 = x_1 + L\sin(\theta)\,, \quad z_2 = -L\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + L\cos(\theta)\,\dot{\theta}\,, \quad \dot{z}_2 = L\sin(\theta)\,\dot{\theta}$$

Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{M_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{M_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) - M_2 g z_2 \\ &= \frac{M_2 L^2}{2}\dot{\theta}^2 + M_2 L\cos(\theta)\,\dot{\theta}\,\dot{x}_1 + \frac{M_1+M_2}{2}\dot{x}_1^2 + M_2 g L\cos(\theta) \end{aligned}$$

Rollpendel II

Euler-Lagrange Gleichung für x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \\
\frac{d}{dt}\Big((M_1+M_2)\dot{x}_1 + M_2 L\cos(\theta)\dot{\theta}\Big) &= 0 \\
(M_1+M_2)\ddot{x}_1 - M_2 L\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + M_2 L\cos(\theta)\ddot{\theta} &= 0
\end{aligned}$$

Und für θ:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\
\frac{d}{dt}\Big(M_2 L^2\dot{\theta} + M_2 L\cos(\theta)\dot{x}_1\Big) &= -M_2 L\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x}_1 - M_2 gL\sin(\theta) \\
M_2 L^2\ddot{\theta} - M_2 L\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x}_1 + M_2 L\cos(\theta)\ddot{x}_1 &= -M_2 L\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x}_1 - M_2 gL\sin(\theta) \\
M_2 L^2\ddot{\theta} + M_2 L\cos(\theta)\ddot{x}_1 &= -M_2 gL\sin(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen vermischen $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$. Kann ich sie separieren?

Rollpendel III

Diese Gleichungen können wir umorganisieren:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{M_2}{M_1+M_2} L \sin(\theta)\dot{\theta}^2 - \frac{M_2}{M_1+M_2} L \cos(\theta)\ \ddot{\theta} \\ M_2 L^2 \ddot{\theta} &= -M_2 L \cos(\theta)\ \ddot{x}_1 - M_2 g L \sin(\theta)\end{aligned}$$

Wir benutzen $\ddot{x}_1$ aus Gleichung 1 in Gleichung 2:

$$\begin{aligned}M_2 L^2 \ddot{\theta} &= -\frac{M_2^2}{M_1+M_2} L^2 \cos(\theta)\sin(\theta)\ \dot{\theta}^2 + \frac{M_2^2 L^2}{M_1+M_2} \cos^2(\theta)\ \ddot{\theta} - MgL\sin(\theta) \\ \frac{M_1 M_2 + M_2^2 \sin^2(\theta)}{M_1+M_2} L^2 \ddot{\theta} &= -\frac{M_2^2 L^2}{M_1+M_2} \cos(\theta)\sin(\theta)\ \dot{\theta}^2 - MgL\sin(\theta)\end{aligned}$$

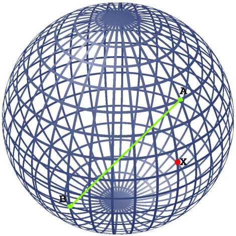
Eine Gleichung nur für θ, ohne x_1.

Und x_1? Am besten lassen wir die Gleichung als:

$$\frac{d}{dt}\left((M_1+M_2)\dot{x}_1 + M_2 L \cos(\theta)\ \dot{\theta}\right) = 0$$

eine Erhaltungsgröße! x-Impuls ist erhalten geblieben.

Beispiel 4: Punkt nahe der Erde



Ein Objekt bewegt sich in der Luft, nahe der Erde.
Keine Zwangsbedingungen.
Weil wir auf der Erde sitzen, wollen wir Kugelkoordinaten benutzen.
Da sich die Erde jedoch dreht, verwenden wir eine modifizierte Definition des Azimuthwinkels!

Koordinaten: $q_1 = \theta$, $q_2 = \tilde{\varphi} = \varphi - \Omega t$, $q_3 = r$
Hier ist $\Omega = 2\pi/(24\ \text{Stunden})$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\tilde{\varphi} + \Omega t) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\tilde{\varphi} + \Omega t) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

Im Folgenden werde ich φ statt $\tilde{\varphi}$ schreiben, um die Notation zu vereinfachen.

Aber dürfen wir ...

Ei waddemal! Dürfen wir solche beschleunigten Koordinaten benutzen?

Diese Koordinaten erfüllen **Newton I** nicht.
Ja, und? Mit Lagrangemethoden können wir auch solche Koordinatensysteme benutzen.

Das Leben wird in solchen Koordinaten komplizierter sein.
Aber *wir leben in diesen Koordinaten.*

Punkt nahe der Erde II

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lagrangefunktion $L = mv^2/2 - V(r)$. Aber was ist v^2?

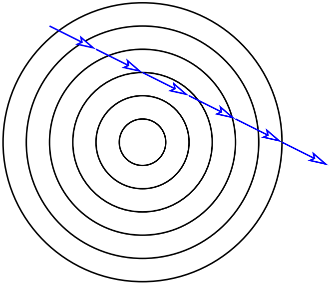
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d}{dt} r \sin(\theta)\cos(\varphi+\Omega t) = \sin(\theta)\cos(\varphi+\Omega t)\ \dot{r} + r\cos(\theta)\cos(\varphi+\Omega t)\ \dot{\theta} - r\sin(\theta)\sin(\varphi+\Omega t)(\dot{\varphi}+\Omega) \\
\dot{y} &= \frac{d}{dt} r \sin(\theta)\sin(\varphi+\Omega t) = \sin(\theta)\sin(\varphi+\Omega t)\ \dot{r} + r\cos(\theta)\sin(\varphi+\Omega t)\ \dot{\theta} + r\sin(\theta)\cos(\varphi+\Omega t)(\dot{\varphi}+\Omega) \\
\dot{z} &= \frac{d}{dt} r\cos(\theta) = \cos(\theta)\ \dot{r} - r\sin(\theta)\ \dot{\theta} \\
v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)(\dot{\varphi}+\Omega)^2 \\
L &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2\sin^2(\theta)}{2}(\dot{\varphi}+\Omega)^2 - V(r)
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange Gleichung für r:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \\
\frac{d}{dt} m\dot{r} &= -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}^2 + 2mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}\Omega + mr\sin^2(\theta)\ \Omega^2 \\
m\ddot{r} &= -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}^2 + 2mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}\Omega + mr\sin^2(\theta)\ \Omega^2
\end{aligned}
$$

r-gleichung: Bedeutung

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \underline{+ mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}^2} + 2mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}\Omega + mr\sin^2(\theta)\ \Omega^2$$



Eine gerade Linie verbleibt in sphärischen Koordinaten nicht in einem festen radialen Abstand.
Wenn $\dot{r}$ negativ beginnt,
steigt sie bis Null an,
und nimmt dann zu, um positiv zu werden.

Wie schnell muss ich fliegen, um die Erde in einer festen Höhe zu umrunden?
Schnell genug, dass $mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}^2$ so groß wie $|\partial V/\partial r|$ ist.

Punkt nahe der Erde: θ

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2\sin^2(\theta)}{2}(\dot{\varphi}+\Omega)^2 - V(r) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\
\frac{d}{dt} mr^2\dot{\theta} &= mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)(\dot{\varphi}+\Omega)^2 \\
mr^2\ddot{\theta} &= \underline{-2mr\,\dot{\theta}\dot{r} + mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2} + 2mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}\Omega + mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\Omega^2
\end{aligned}
$$

$mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2$ haben wir schon gesehen.
Diese Ausdruck sichert, dass (θ, φ) Großkreise folgen.
$-2mr\dot{\theta}\dot{r}$? Wenn wir weiter weg gehen ($\dot{r} > 0$), soll $\dot{\theta}$ sich langsamer ändern.

Die Ω und Ω^2 Ausdrücke diskutieren wir am Ende.

Punkt nahe der Erde: φ

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2\sin^2(\theta)}{2}(\dot{\varphi}+\Omega)^2 - V(r) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\
\frac{d}{dt} mr^2\sin^2(\theta)(\dot{\varphi}+\Omega) &= 0 \\
\frac{d}{dt} mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi} &= \Omega\left(-2mr\sin^2\theta\;\dot{r} - 2mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\;\dot{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

$mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ ist *fast* eine Erhaltungsgröße. Aber...

Was sind alle diese Ausdrücke, $\propto \Omega$ oder $\propto \Omega^2$?

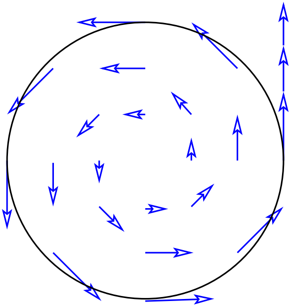
Ω^2: Zentrifugalkraft

Die $\propto \Omega^2$ Ausdrücke: $$m\ddot{r} = ... + mr\sin^2\theta\,\Omega^2\,,$$
$$mr\ddot{\theta} = ... + mr\sin(\theta)\cos(\theta)\,\Omega^2$$

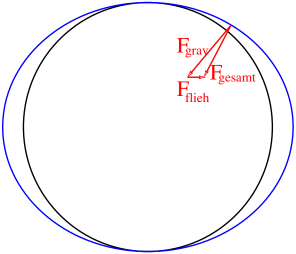
Einfacher in Zylinderkoordinaten: $$m\ddot{\rho} = m\rho\,\Omega^2$$

Zentrifugalkraft oder Fliehkraft

Wenn ich auf der Erde sitze, bewege ich mich mit Geschwindigkeit $v = \Omega r\sin(\theta)$. Ohne (echte) Kräfte fliege ich in eine gerade Linie – hoch in die Luft.



Fliehkraft und Erdfigur



Die Schwerkraft zeigt zum Mittelpunkt der Erde.
Fliehkraft zeigt in $\vec{e}_\rho$-Richtung, nicht in $\vec{e}_r$-Richtung.
Der Erdoberflächenormalvektor muss parallel zur Summe sein.
Deshalb hat die Erde eine äquatoriale Ausbuchtung.

Corioliskraft

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir haben uns Effekte angesehen, die linear in Ω sind:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= ... + 2mr\sin^2(\theta)\ \dot{\varphi}\Omega \\ r\ddot{\theta} &= ... + 2mr\sin(\theta)\cos(\theta)\ \dot{\varphi}\Omega \\ r\sin(\theta)\ddot{\varphi} &= ... + (-2\sin(\theta)\ \dot{r} - 2r\cos(\theta)\ \dot{\theta})\Omega \end{aligned}$$

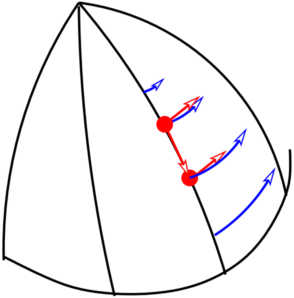
Jeder Ausdruck ist auch proportional zu $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, oder $\dot{\varphi}$ (Geschwindigkeit)
Kollektiv heißen diese Effekte *Corioliskraft*.
Diese Scheinkräfte können wir einfacher in kartesischen Koordinaten schreiben!

$$\ddot{r}_i = ... - 2\epsilon_{ijk}\Omega_j v_k \qquad \text{oder} \qquad \vec{a} = ... - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}\,.$$

Hier ist $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ die Winkelgeschwindigkeit.

Coriolis: Beispiel 1

Ich fliege südlich, vom niedrigeren bis größeren θ-Wert.



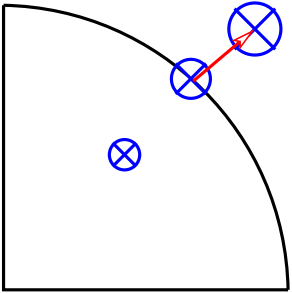
Die Erde bewegt sich unter mir, mit Geschwindigkeit $\Omega r \sin(\theta)$. Meine (echte) $\vec{e}_\varphi$-Geschwindigkeit ist $\Omega r \sin(\theta)$.
Dann gehe ich irgendwo hin, wo $\sin(\theta)$ größer ist.
Die Erde bewegt sich schneller unter mir.

In der Erdperspektive muss ich mich in $-\vec{e}_\varphi$-Richtung bewegen.
Deshalb finde ich $\ddot{\varphi} = -2r\Omega \cot\theta \, \dot{\theta}$

Coriolis: Beispiel 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ich fliege nach oben, $\dot{r} > 0$.



auf der Erde gehe ich in $\vec{e}_\varphi$-Richtung
(im Bild illustriert mit einem Kreuz)
mit Geschwindigkeit $v = r \sin(\theta)\ \Omega$.
In der Luft ist r aber größer.
Die Geschwindigkeit, mit der ich mich bewegen *soll*, ist größer oben als unten.
Meine Geschwindigkeit ist *nicht groß genug*.

Deshalb finde ich $r\ddot{\varphi} = -2\Omega\,\dot{r}$: wenn $\dot{r}$ positiv ist, muss $\dot{\varphi}$ abnehmen.

Summary in English

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

We considered 4 example problems:

- A ladder leaning on a wall. This was straightforward
- Motion on the surface of the Earth. Here we saw that the coordinates θ, φ have "accelerations" $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, even for free motion.
  These correspond to following great circles.
- A pendulum on a roller. Here we see that the Lagrange method is far simpler than the standard Newton's methods.
- Motion above the rotating Earth. Here we see that the coordinates evolve nontrivially along straight lines. But we also see the effects of a rotating frame: centrifugal force and Coriolis force.