Theoretische Physik I:

Vorlesung 9: Symmetrie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lagrange Methode:

- Generalisierte Koordinaten finden
- Lagrangefunktion finden
- Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange) rechnen
- **Bewegungsgleichungen lösen**

Aber wie lösen wir die Bewegungsgleichungen?
Es hilft wenn wir *Symmetrien* haben.

Wie helfen Symmetrien? Das werden wir heute diskutieren.

Fragen über letzte Woche

Lagrange II ist ein Beispiel von Minimierungsproblemen:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} F\left(q(t), \dot{q}(t)\right)\, dt\,, \qquad \delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial F(q,\dot{q})}{\partial q}\,.$$

Frage: Wie weißt man, was $F(q, \dot{q})$ sein soll?
Gibt es allgemeine Methoden, um $F(q, \dot{q})$ zu finden?

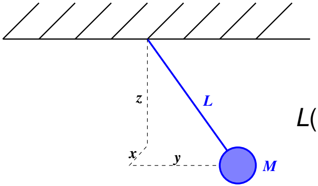
Antwort: Alle Physik in dem Problem liegt, in was die richtige Koordinaten q sind, **und in was die richtige Form der Funktion** $F(q, \dot{q})$ **ist.**

Es gibt verschiedene Probleme, die man mit Minimierungsmethoden lösen kann.
Die harte Arbeit ist, genau $F(q, \dot{q})$ zu finden.
(Und evtl. die Euler-Lagrange-Gleichungen zu lösen.)

Kanonischer Impuls

Wir arbeiten ständig mit $\partial L(q, \dot{q}, t)/\partial \dot{q}$. Es braucht einen Namen:

Kanonischer Impuls: $$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$ $=$ Gleichung. $\equiv$ Begriff.



Beispiel: Sphärisches Pendel
Länge L, Masse M
2 Koordinaten: θ, φ

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V$$
$$= \frac{ML^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ML^2}{2}\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2 + MgL\cos(\theta)$$

Jede Koordinate hat einen Kanonischen Impuls:

$$p_\theta = \frac{\partial L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta}\,, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = ML^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}\,.$$

(p_a ist nicht immer $m\dot{q}_a$!) Was ist seine Rolle?

Kanonischer Impuls, Euler-Lagrange

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}p_i = Q_i$$

(Hier schreiben wir auch $\partial L / \partial q_i = Q_i$ die **generalisierte Kraft.**)

Für unser Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = ML^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\varphi}^2 - MgL\sin(\theta) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}$$

Aha: p_φ ist eine Erhaltungsgröße. Aber warum?

weitere Namen

Wenn eine Koordinate q_i hat $Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$,
nennen wir sie eine **zyklische Koordinate**.
Der kanonische Impuls jeder zyklischen Koordinate ist eine Erhaltungsgröße.

Hier ist eine Erhaltungsgröße oder **Konstante der Bewegung** eine Funktion $f(q, \dot{q}, t)$ für die $df/dt = 0$ ist. (Volle Zeitableitung – nicht $\partial f(q, \dot{q}, t)/\partial t$!)

Gesamte und Partielle Ableitungen...

- $\dfrac{df(q,\dot q,t)}{dt}$ *Gesamte Zeitableitung,* ist die echte Zeitabhängigkeit von $f(q,\dot q,t)$.
- $\dfrac{\partial f(q,\dot q,t)}{\partial t}$, *Partielle Zeitableitung*, ist die Abhängigkeit, dass sie nicht durch die Zeitabhängigkeit von q und $\dot q$ ergibt.

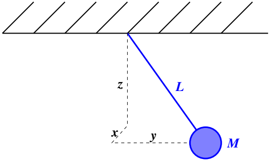
Betrachten Sie zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(\theta,\dot\varphi,t) &= ML^2\sin^2(\theta)\dot\varphi + \frac{t^2}{2}\,.\\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial t^2/2}{\partial t} = t\,.\\
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f(\theta,\dot\varphi,t)}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial f(\theta,\dot\varphi,t)}{\partial\dot\varphi}\frac{d\dot\varphi}{dt} + \frac{\partial f(\theta,\dot\varphi,t)}{\partial t}\\
&= 2ML^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\varphi\dot\theta + ML^2\sin^2(\theta)\ddot\varphi + t\,.
\end{aligned}
$$

Trockene Notation. Aber wichtig, in was folgt.

Energieerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{ML^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ML^2}{2}\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2 + MgL\cos(\theta)$$

Erhaltung von Energie $E = T + V$?

$$\begin{aligned}
E &= T + V = \frac{ML^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ML^2}{2}\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2 - MgL\cos\theta \\
\frac{dE}{dt} &= ML^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + ML^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\varphi}^2\dot{\theta} + ML^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + MgL\sin(\theta)\,\dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}\left[ML^2\ddot{\theta} - ML^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\varphi}^2 + MgL\sin(\theta)\right] + \dot{\varphi}\frac{d}{dt}\left[ML^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}\right] \\
&= \dot{\theta}[0] + \dot{\varphi}[0] = 0
\end{aligned}$$

War das Glück? (Nein.) Ist das immer so? (Nein.)

Wie zeitabhängig ist L?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wenn $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + \alpha)$ – das heißt, wenn $L(q, \dot{q}, t)$ keine *explizite* Zeitabhängigkeit hat, finden wir:

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt} q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right).$$

L ist zeitabhängig nur, weil q_i und $\dot{q}_i$ zeitabhängig sind.
In diesem Fall *ist* L zeitabhängig.
Aber die Zeitabhängigkeit der Lagrangefunktion hat eine bestimmte Struktur:

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt} q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + p_i \ddot{q}_i$$

Euler-Lagrange: $\partial L / \partial q_i = (d/dt) p_i$, und deshalb:

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} p_i + p_i \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i$$

Hamilton-Funktion

Wenn $L(q, \dot{q}, t)$ keine explizite Zeitabhängigkeit hat, finden wir:

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i$$

Deshalb ist es sinnvoll, die **Hamilton-Funktion** festzulegen:

$$\begin{aligned} H(p_i, q_i, t) &\equiv \sum_i (p_i \dot{q}_i) - L(q, \dot{q}, t) \\ \frac{d}{dt} H(p_i, q_i, t) &= \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i - \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = 0 \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ist eine Erhaltungsgröße.

Solange $\partial V / \partial \dot{q}_i = 0$ (für alle i) (das heißt, die Potentialenergie geschwindigkeit-unabhängig ist) ist $H = T + V = E$ die Energie.

Die Hamilton-Funktion werden wir viel weiter diskutieren. Aber nicht Heute.

Ausnahmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Es gibt Systeme, wobei man die Kraft nicht in Form $\vec{F} = -\nabla V$ schreiben kann. (Systeme mit Reibung, zum Beispiel.) Diese sind in Kuypers Kapitel 6 diskutiert. Das empfehle ich, aber um Zeit zu sparen, werden wir es nicht diskutieren.
- Es gibt Systeme, wobei $L(q, \dot{q}, t)$ explizite Zeitabhängigkeit hat. Systeme mit rheonome Zwangsbedingungen sind Beispiele. Bei solche Systeme ist H keine Erhaltungsgröße.
- In Elektromagnetismus gibt es einer konservativen Potentialenergie, die aber geschwindigkeitabhängig ist. Sie erfahren viel mehr über solche Systeme in Theorie 3 (Elektrodynamik). Wir diskutieren solche Probleme in Theorie 1 nicht weiter.

Bemerkung: Einheiten

Normaler Weise hat eine Koordinate die Einheiten von Länge m,
und ein Impuls die Einheiten kg m/s.
Aber θ, φ haben **keine** Einheiten – Winkel sind reine Zahlen.
Ihre kanonische Impulse haben auch komische Einheiten:

$$p_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}} .$$

Das ist OK: *kanonische* Koordinaten und *kanonische* Impulse *müssen* nicht die gleiche Einheiten haben, wie normale Koordinaten und Impulse.

Aber $p_a = \partial L / \partial \dot{q}_a$. Deshalb sind die Einheiten von p_a und q_a mit einander verbunden.
Die Kombination $p_a q_a$ hat immer die gleiche Einheiten wie Wirkung: $\mathrm{kg\,m^2/s}$,
und $p_a \dot{q}_a$ hat die gleiche Einheiten wie Energie: $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$.

Andere Erhaltungsgröße

Es ist nicht immer einfach, Koordinaten zu schreiben, deren Erhaltungssätze sich aus zyklischen Koordinaten ergeben.
Als Beispiel betrachten Sie das 3-Teilchen-Problem:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{\vec{r}}_3^2 + \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{G_N m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{G_N m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

Dieses System hat 7 Erhaltungsgrößen: Energie, 3 Impulskomponenten, und 3 Drehimpulskomponenten.
Energieerhaltung haben wir gerade diskutiert.
Wie kann ich die Anderen *systematisch* verstehen?

Die Erhaltungsgrößen existieren aufgrund von Symmetrien.
Deshalb müssen wir die Symmetrien und ihre Konsequenzen diskutieren.

Symmetrien

Eine **Symmetrie** ist eine *Transformation* der Koordinaten, wobei die Lagrangefunktion gleich bleibt.
Koordinatentransform bedeutet ein neues Koordinatensystem:

$$q'_i \equiv q'_i(q_1, \ldots, q_N, t) \qquad (\text{ invertierbar, } q_i = q_i(q'_1, \ldots, q'_N, t)\,)$$

Man kann die Lagrangefunktion in die neuen Koordinaten umschreiben:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t)$$

Symmetrie bedeutet, dass L und L' die gleiche Form haben:

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t) = L(q', \dot{q}', t)$$

Beispiel: Parität

Betrachten Sie 2 Beispiele:

1 Koordinate x, mit Lagrangefunktion

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2$$

Ist die Transformation $x \to -x$ eine Symmetrie?

$$\begin{aligned} x' &\equiv -x \quad \text{oder} \quad x = -x' \\ L(x,\dot{x}) &= L(-x',-\dot{x}') = \frac{m}{2}(-\dot{x}')^2 - \frac{D}{2}(-x')^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}')^2 - \frac{D}{2}(x')^2 \equiv L'(x',\dot{x}') \\ L'(x',\dot{x}') &= L(x',\dot{x}') \end{aligned}$$

$x \to -x$ *ist* eine Symmetrie.

1 Koordinate x, mit Lagrangefunktion

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - Dx$$

Ist die Transformation $x \to -x$ eine Symmetrie?

$$\begin{aligned} x' &\equiv -x \quad \text{oder} \quad x = -x' \\ L(x,\dot{x}) &= L(-x',-\dot{x}') = \frac{m}{2}(-\dot{x}')^2 - D(-x') \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}')^2 + Dx' \equiv L'(x',\dot{x}') \\ L(x',\dot{x}') &= \frac{m}{2}(\dot{x}')^2 - Dx' \quad \text{(zum Vergleich)} \end{aligned}$$

$x \to -x$ *ist keine* Symmetrie,
weil D das umgekehrte Vorzeichen hat.

Kontinuierliche Symmetrien

Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine *Familie* von Symmetrien, mit Parameter $\alpha \in \mathcal{R}$
(oder mehrere Parametern $(\alpha, \beta, \gamma, ...) \in \mathcal{R}$);

$$q_i' = q_i'(q_1, \dots, q_N, t, \alpha)$$

Einfaches Beispiel: 3 Teilchen, mit Symmetrie:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &\quad\rightarrow\quad \vec{r}_1' = \vec{r}_1 + (\alpha, \beta, \gamma) \\
\vec{r}_2 &\quad\rightarrow\quad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 + (\alpha, \beta, \gamma) \\
\vec{r}_3 &\quad\rightarrow\quad \vec{r}_3' = \vec{r}_3 + (\alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned}$$

Hier sind (α, β, γ) die (x, y, z) Komponenten einer Translation.
Unsere Lagrangefunktion

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{\vec{r}}_3^2 + \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{G_N m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{G_N m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

bleibt gleich, weil es nur von $\dot{\vec{r}}$ und r-Unterschiede abhängig ist.

Rotationsymmetrie

Komplizierteres Beispiel: Rotation.
3 Teilchen, aber jetzt transformiert:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}$$

Hier sind α, β, γ Rotationswinkel um die z, y, x Achse.

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{\vec{r}}_3^2 + \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{G_N m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{G_N m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

bleibt gleich, weil es nur Längenabhängigkeit und keine Richtungsabhängigkeit hat.

Nöther Theorem

Betrachten Sie eine kontinuierliche Symmetrie, mit Parameter α:

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t, \alpha)$$

(weil es eine Symmetrie ist). α-Ableitung, danach $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L'(q', \dot{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(q(q', \alpha, t), \frac{d}{dt} q(q', \alpha, t), t\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', \alpha, t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(q', \alpha, t) \end{aligned}$$

Aber $\partial L / \partial q_i = (d/dt) p_i$ (Euler-Lagrange) und $\partial / \partial \alpha$ und d/dt kommutieren:

$$0 = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} p_i + p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} .$$

Translation

Symmetrietransformation:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Betrachten wir nur α:

$$r_x \to r'_x + \alpha\,, \qquad r_y = r'_y, \quad r_z = r'_z$$

Deshalb

$$\frac{\partial r_x}{\partial \alpha} = 1\,, \quad \frac{\partial r_y}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial r_z}{\partial \alpha}$$

So finden wir:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(1\,p_x + 0\,p_y + 0\,p_z\Big) = \frac{d}{dt}p_x$$

Die Erhaltungsgröße ist p_x. Für β, γ finden wir p_y und p_z.
Translationsymmetrie $\Rightarrow$ *Impulserhaltung*

Rotation

$$\text{z-Rotation:} \qquad \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}$$

Für kleine α: $\cos\alpha \simeq 1$ und $\sin\alpha \simeq \alpha$:

$$r_x = r'_x - \alpha r'_y \qquad \text{und} \qquad r_y = r'_y + \alpha r'_x\,.$$

Deshalb:

$$\frac{\partial r_x}{\partial\alpha} = -r'_y\,, \quad \frac{\partial r_y}{\partial\alpha} = +r'_x\,.$$

So finden wir:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(p_x\frac{\partial r_x}{\partial\alpha} + p_y\frac{\partial r_y}{\partial\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\Big(-p_x r_y + p_y r_x\Big) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})_z$$

z-Komponente von $\vec{r}\times\vec{p} \equiv \vec{L}$ Drehimpuls.
Rotationsymmetrie $\Rightarrow$ *Drehimpulserhaltung*

Summary in English

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

We started by defining the **Canonical Momentum**

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

and the **generalized force** $Q_i = \partial L / \partial q_i$.
We named a coordinate, for which the generalized force is zero, a **cyclic coordinate**, and noticed that the associated canonical momentum is conserved.

If $L(q, \dot{q}, t)$ has no explicit time dependence,

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)\right) = 0$$

and we named this new combination the **Hamiltonian.**

We defined a **symmetry** to be a coordinate transformation $q_i = q_i(q', t)$ which leaves the form of the Lagrangian unchanged. Each continuous symmetry, $q_i = q_i(q', \alpha, t)$, $\alpha \in$ R has an associated conservation law:

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Translation symmetry leads to momentum conservation,
while rotation symmetry leads to angular momentum conservation.