Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Präsenzübung

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2020
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Hockey auf dem Hügel

Wir gehen das allereinfachste Beispiel für Bewegung unter Zwangsbedingungen durch, ein Objekt das reibungsfrei eine schiefe Ebene herunterrutscht.

Betrachten Sie einen Hockey Puck auf einer gekippten Eisbahn. Es gibt zwei Koordinaten, x und z (horizontaler Abstand und Höhe). Die Höhe hängt von x durch die Zwangsbedingung

$$z = x\tan(\alpha).$$

ab. Der Puck bewegt sich durch den Einfluss der Gravitation mit der Kraft $F_g = -mg\hat{e}_z$ und der Normalkraft aufgrund der Zwangsbedingung.

10.1a)

Schreiben sie die Lagrange-II-Funktion für x hin.

10.1b)

Benutzen Sie sie, um die Bewegungsgleichung zu finden. Diese sollte so aussehen wie Bewegung unter Einfluss der Gravitation, aber mit der falschen Erdbeschleunigung: $g \to gf(\alpha)$. Wie lautet die Funktion von α?

10.1c)

Schreiben Sie die Lagrange-I-Funktion mit Lagrange-Multiplikator λ hin.

10.1d)

Schreiben sie die separaten Bewegungsgleichungen für $\ddot{x}$ und für $\ddot{z}$ in Abhängigkeit des (noch nicht bestimmten) Werts von λ auf.

10.1e)

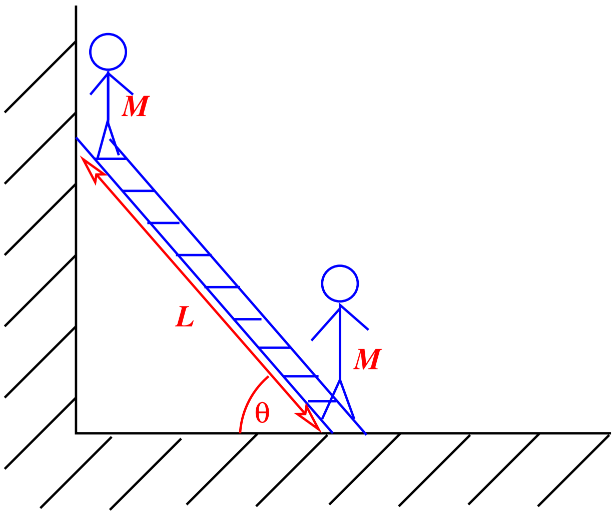
Bilden Sie die zweite Zeitableitung der Bedingungsgleichung $z = x\tan(\alpha)$, unter der Berücksichtigung, dass α eine Konstante ist. Benutzen Sie das Ergebnis, um $\ddot{z}$ mit $\ddot{x}$ in einer Ihrer Bewegungsgleichungen zu ersetzen und benutzen Sie die resultierenden Gleichungen um λ zu bestimmen.

10.1f)

Mit der Erinnerung, dass $\ddot{x} = F_x/m$ und $\ddot{z} = F_z/m$, bestimmen Sie die Normalkraftkomponenten F_x und F_z. Steht die Normalkraft im rechten Winkel zur Oberfläche?

Aufgabe 10.2: Physik auf einer Leiter

Betrachten Sie die in der Vorlesung diskutierte, an eine Wand gelehnte Leiter.



Die Lagrange-II-Funktion lautet:

$$L(\theta) = \frac{ML^2\dot{\theta}^2}{2} - MgL\sin(\theta).$$

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Normalkraft auf die Wand durch

$$-\lambda_x = -\frac{d}{dt}\left(mL\sin(\theta)\dot{\theta}\right)$$

gegeben ist, doch wir haben das weder ausgewertet noch herausgefunden, wann die Leiter die Wand verlässt. Lassen Sie uns das nun tun.

10.2a)

Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für θ.

10.2b)

Statt Sie zu lösen, werden wir die Energie benutzen. Schreiben Sie einen Ausdruck für die Energie des Systems $T + V$. Wenn die Leiter mit einem Winkel θ_0 mit kinetischer Energie gleich Null startet, wie groß ist die Startenergie?

Benutzen Sie dieses Resultat, um einen Ausdruck für $\dot{\theta}$ als Funktion von θ and θ_0 zu finden.

10.2c)

Betrachten Sie den Fall $\theta_0 = \pi/2$, sodass die Leiter aufrecht gegen die Wand gelehnt startet. Benutzen Sie Ihren Ausdruck für $\dot{\theta}$ um $(mL\sin(\theta)\dot{\theta})$ als eine Funktion die nur von θ abhängt umzuschreiben.

10.2d)

Welcher Wert für θ maximiert diese Funktion? Zeigen Sie, dass dies der Wert für θ ist, bei dem die Leiter die Wand verlässt.