Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Präsenzübung

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1: Der Ball bewegt sich

Betrachten sie einen runden Fußball der Masse $m = 1$ kg. In dieser Aufgabe werden wir ihn als punktförmig nähern.

Stellen Sie sich vor, der Ball starte am Punkt $\vec{r}_i = (0,0,0)$ und wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = (10,0,10) = 10\hat{e}_x + 10\hat{e}_z$, also 10 m/s nach vorne (x-Richtung) und 10m/s nach oben (z-Richtung), geschossen. Er fliegt unter Einfluss der Gravitation, die eine nach unten gerichtete Kraft ausübt, welche wiederum eine Beschleunigung $g = -10\hat{e}_z\ \mathrm{m/s^2}$ zur Folge hat.

1.1a)

Zeigen Sie, dass die Flugzeit des Balls 2 Sekunden beträgt und dass er am Punkt $\vec{r}_f = (20,0,0)$ landet. Das sollte einfach sein.

1.1b)

Geben Sie einen Ausdruck für die potenzielle Energie $V(\vec{r})$ und für die kinetische Energie $T(\vec{v})$ an. Das sollte auch einfach sein.

1.1c)

Betrachten Sie drei hypothetische Trajektorien des Balls:
A) die tatsächliche Trajektorie, $\vec{r}(t) = (10t, 0, 10t - 5t^2)$
B) die geradlinige Trajektorie $\vec{r}(t) = (10t, 0, 0)$
C) die Kreisbahn $\vec{r}(t) = \left(10 - 10\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), 0, 10\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$.

Jede der Trajektorien soll so gewählt werden, dass ihr Anfangspunkt, ihr Endpunkt und die Flugdauer mit der tatsächlichen Trajektorie übereinstimmt. Zwischen Anfangs- und Endpunkt unterscheiden sich die Trajektorien.

Berechnen Sie für jede Trajektorie das zeitliche Integral der potenziellen Energie

$$\int_0^{t_f=2} V(\vec{r}(t))\, dt$$

und das zeitliche Integral der kinetischen Energie

$$\int_0^{t_f=2} T(\dot{\vec{r}}(t))\, dt.$$

Welche der Trajektorien hat das größte/mittlere/kleinste Zeitmittel der potenziellen Energie?
Welche der Trajektorien hat das größte/mittlere/kleinste Zeitmittel der kinetischen Energie?

1.1d)

Betrachten Sie den folgenden Ausdruck der aus kinetischer und potenzieller Energie gebildet wird:

$$S \equiv \int_{t=0}^{t=t_f=2} (T - V)\, dt\,.$$

(Die Größe $\mathcal{L} = T - V$ nennt mann *Lagrange-Funktion*, und das zeitliche Integral S über die Lagrange-Funktion heißt *Wirkung*. Wir werden beiden Größen noch oft verwenden.)

Zeigen Sie, dass die Wirkung für die tatsächliche Trajektorie kleiner ist als für die beiden hypothetischen Trajektorien, obwohl bei einer der Trajektorien das Integral über T kleiner ist und bei der anderen Trajektorie das Integral über $-V$ kleiner ist.

1.1e)

Falls noch Zeit:
Denken Sie sich selbst eine hypothetische Trajektorie aus und testen Sie, ob Sie eine Trajektorie mit kleinerer Wirkung S als die Wirkung der tatsächlichen Trajektorie finden.

1.1f)

Falls noch Zeit:
Erklären/beweisen Sie, dass es Trajektorien gibt, für die $\int -V dt$ beliebig klein wird. Zeigen Sie, warum diese zu großen Werten von $\int T dt$ tendieren, sodass sie nicht zu kleinen Werten von S führen.
Zeigen Sie in gleicher Weise, dass es eine Trajektorie mit minimalem $\int T dt$ gibt. Welche Trajektorie hat diese Eigenschaft? Warum hat sie einen größeren Wert für S als die tatsächliche Trajektorie?