Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Präsenzübung

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2020
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1: Manuelle Berechnung

Betrachten Sie das Folgende Paar von erste Ordnung GDGLs für die zwei Funktionen $s(t)$ und $c(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = c(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = -s(t) \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Die Anfangswerte sind $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$.

8.1a)

Natürlich kennen wir die Lösung: $c(t) = \cos(t)$ und $s(t) = \sin(t)$. Zeigen Sie als erstes, dass das die exakten Lösungen sind.

8.1b)

Jetzt wollen wir die Näherungsmethoden ausprobieren, die wir im Unterricht behandelt haben. Kommen Sie so weit wie möglich, indem sie welche Methode auch immer verwenden – Papier, Taschenrechner, Mathematica, usw.
Versuchen Sie als erstes das Euler-Verfahren. Erinnern sie sich daran, dass das Euler-Update für eine Menge von Variablen $g_1, \ldots, g_n$ und Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t} = f_i(g_j) \tag{8.1.2}$$

gleich

$$g_i(t + \Delta t) = g_i(t) + (\Delta t) f_i(g_j(t)) \tag{8.1.3}$$

ist. Werten Sie $s(1), c(1)$ mittels des Abstands $\Delta t = 1$ aus.
Finden Sie dann $s(2), c(2)$, $s(3), c(3)$ und $s(4), c(4)$.
Wie verhalten sich die Lösungen? Sie sollten in der Lage sein, das mit Stift und Papier zu tun.
Holen Sie Ihren Taschenrechner/Computer heraus und versuchen Sie es wieder mit $\Delta t = 0.2$; versuchen Sie nach $t = 1$ zu kommen und schauen Sie, wie nah die Werte von s, c vom exakten Ergebnis entfernt sind.

8.1c)

Als nächstes probieren wir die zweite Ordnung Runge-Kutta-Verfahren aus. Für dieses Verfahren lösen wir das System der Differentialgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} g_{i,\text{proj}}(t + \Delta t) &= g_i(t) + (\Delta t) f_i(g_j(t)) \\ g_i(t + \Delta t) &= g_i(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(f_i(g_j(t)) + f_i(g_{j,\text{proj}}(t + \Delta t)) \right) \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

Probieren Sie diesen Ansatz wieder per Hand mit $\Delta t = 1$ aus und entwickeln Sie die Felder ein paar Schritte. Versuchen Sie es dann mit $\Delta t = 0.2$, jetzt mit dem Computer, und versuchen Sie nach $t = 1$ zu kommen.

8.1d)

Schlussendlich probieren wir das vierte Ordnung Runge-Kutta-Verfahren aus, das auf vier Schätzungen der Steigung und drei projizierten Werten der Funktionen basiert:

$$\begin{aligned}
f_{i,1} &= f_i(g_j(t)) \\
g_{i,1} &= g_i(t) + (\Delta t/2) f_{i,1} \\
f_{i,2} &= f_i(g_{j,1}) \\
g_{i,2} &= g_i(t) + (\Delta t/2) f_{i,2} \\
f_{i,3} &= f_i(g_{j,2}) \\
g_{i,3} &= g_i(t) + (\Delta t) f_{i,3} \\
f_{i,4} &= f_i(g_{j,3}) \\
g_i(t+\Delta t) &= g_i(t) + \frac{\Delta t}{6}(f_{i,1} + 2f_{i,2} + 2f_{i,3} + f_{i,4})
\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Probieren Sie es für $\Delta t = 1$ und schauen Sie, wie gut oder schlecht es funktioniert! Probieren Sie es dann für $\Delta t = 0.2$ und schauen Sie, wie gut es nach fünf Schritten funktioniert.