Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Präsenzübung

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2020
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: Oszillationen

Man kann jedes beliebige Koordinatensystem benutzen, doch wenn man das falsche benutzt, wird man darunter leiden. Lassen Sie uns sehen was passiert, wenn wir eine unglückliche Wahl der Koordinaten für den einfachen harmonischen Oszillator verwenden. Wir nehmen das als ein Beispiel für Legendre Transformationen, und wie Koordinatentransformationen die Impulse, also den Phasenraum transformieren.

Betrachten Sie den einfachen harmonischen Oszillator (simple harmonic oscillator (SHO)) in zwei Dimensionen (x, y), mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{D}{2}\left(x^2 + y^2\right). \tag{9.1.1}$$

9.1a)

Finden Sie die kanonischen Impulse p_x, p_y. Führen Sie die Legendre-Transformation auf $H(x, y, p_x, p_y)$ durch. Das sollte einfach sein.

9.1b)

Betrachten Sie einen neuen Koordinatensatz (r, s), der wie folgt definiert ist:

$$\begin{cases} r = x \\ s = x + y \end{cases} \tag{9.1.2}$$

Schreiben Sie diese Relation als eine Matrix, d.h.

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{9.1.3}$$

Drücken Sie jedes Element der Matrix durch eine Ableitung einer neuen Koordinaten nach einer alten Koordinate aus, z.B. $m_{11} = \partial r / \partial x$.

9.1c)

Finden Sie Ausdrücke für (x, y) als Funktionen von (r, s). Sie können das entweder algebraisch machen, oder Sie finden die Inverse der Matrix, die sie soeben gefunden haben.

9.1d)

Drücken Sie die Lagrange-Funktion durch r, s aus. Was für eine seltsame Eigenschaft fällt Ihnen auf – tritt ein $\dot{r}\dot{s}$-Term auf?

9.1e)

Finden Sie die Hamilton-Funktion durch anwenden einer Legendre-Transformation auf diese Lagrange-Funktion. Gibt es einen $p_r p_s$-Term und hat er das selbe Vorzeichen wie der $\dot{r}\dot{s}$-Term in der Lagrange-Funktion?

9.1f)

Lassen Sie uns nun stattdessen mit der Hamilton-Funktion in Abhängigkeit von x, y, $H(x, y, p_x, p_y)$, die wir zuvor berechnet haben, starten. Benutzen Sie die Tatsache, dass $\partial p_r / \partial p_x = \partial x / \partial r$ (und äquivalent für die anderen Komponenten) sowie die Form der Transformation von $(r, s) \to (x, y)$ um die Transformation von $(p_x, p_y) \to (p_r, p_s)$ zu bestimmen. Wenden Sie diese Transformation und die Tranformation der Koordinaten an, um $H(x, y, p_x, p_y) \to H(r, s, p_r, p_s)$ zu tranformieren. Überprüfen Sie, dass Sie das selbe Ergebnis erhalten, dass Sie durch Anwenden der Legendre-Transformation auf $L(r, s, \dot{r}, \dot{s})$ erhalten haben.

9.1g)

Finden Sie die Hamilton'schen Gleichungen für $\dot{r}, \dot{s}, \dot{p}_r, \dot{p}_s$. *Sieht es so aus*, als ob die Zeitentwicklung r mit s mischt, d.h., sieht die Dynamik in diesen Koordinaten komplizierter aus als in den ursprünglichen (x, y) Koordinaten?

(Es ist nicht nötig, die Hamilton'schen Gleichungen zu lösen, finden Sie nur Ihre Form.)

9.1h)

Wenn Sie noch viel Zeit übrig haben, versuchen Sie $\ddot{r}$ als Funktion von (r, s) zu finden.

Vieles, was wir mit Oszillationen machen werden, besteht daraus, dass wir mit Systemen starten, die diese Form des nichtdiagonalen kinetischen Terms haben und diese bearbeiten, so dass sie einfach werden. Das bedeutet, wir starten mit Systemen, die wie die (r, s)-Koordinaten-Version aussehen und werden versuchen die (x, y)-Koordinaten-Version des Problems zu finden.