Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 11

Deadline: 01.07 23 Uhr online

Aufgabe 11.1: Doppelpendel, mal wieder. 9p.

Betrachten Sie das Doppelpendel: das obere Pendel hat eine Schnur der Länge ℓ_1 und eine Linse der Masse m_1, das Pendel, das daran hängt, hat eine Schnur der Länge ℓ_2 und eine Linse der Masse m_2. Sie hängen im Schwerefeld, $V = mgz$ für jede Masse.

11.1a) 1p

Schreiben Sie den Lagrangian für das Doppelpendel auf.

11.1b) 2p

Vereinfachen Sie den Lagrangian: in der potentiellen Energie nähern Sie $\cos(\theta) = 1 - \theta^2/2$ und in der kinetischen Energie nähern Sie $\cos(\theta_1 - \theta_2) \simeq 1$. Zeigen Sie, dass das Problem unter diesen Annahmen jetzt wie ein gekoppelter harmonischer Oszillator aussieht.

11.1c) 2p

Schreiben Sie die Lagrange-Funktion in der Standardform

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2}\dot{\theta}_i T_{ij} \dot{\theta}_j - \frac{1}{2}\theta_i V_{ij} \theta_j . \tag{11.1.1}$$

Wie lauten die Matrizen T_{ij} und V_{ij}?

11.1d) 2p

Lösen Sie das Eigenwertproblem für $T^{-1}V$.

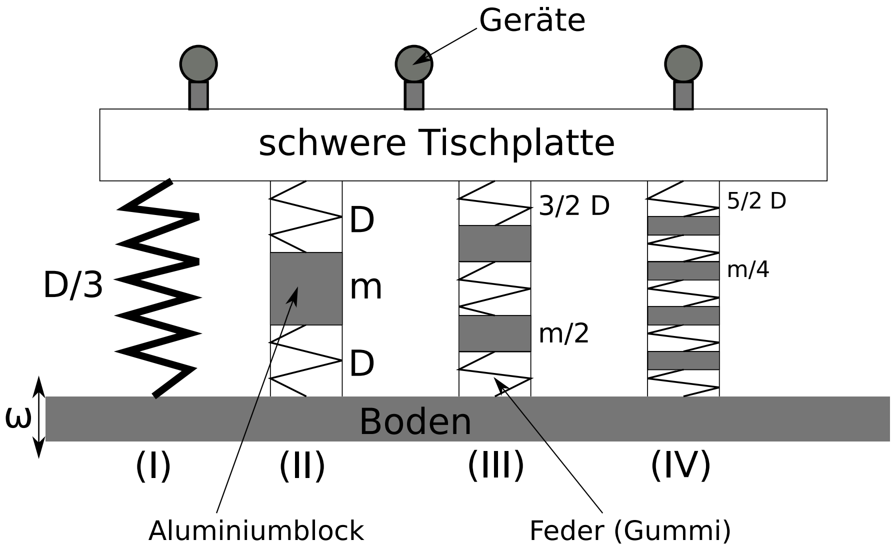
11.1e) 2p

Wenn $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ und $m_1 = m_2 = m$, wie lauten die Eigenwerte und die Eigenfrequenzen des Pendels? Skizzieren Sie alle.

Aufgabe 11.2: Optischer Tisch. 11p.

Ein optischer Tisch ist ein Tisch, auf dem man empfindliche experimentelle Geräte aufbauen kann. Die Schlüsseleigenschaft eines guten Tisches ist, dass er Vibrationen des Bodens daran hindert, an der Oberseite des Tisches zu rütteln.

Nehmen Sie an, der Boden vibriert mit Frequenz ω. Die Tischplatte hat eine Masse von M und statt steifen Beinen verwenden wir eine Feder mit Federkonstante $D/3$ (wir werden in Kürze sehen, warum $D/3$), die den Tisch mit dem Boden verbindet. Betrachten Sie die Feder als masselos.

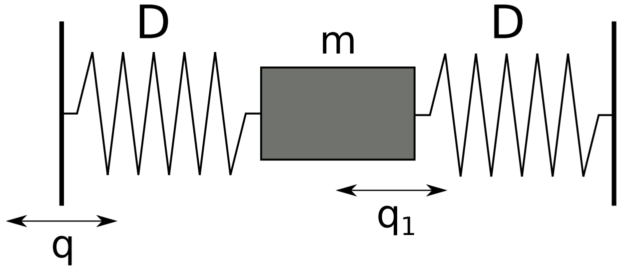


11.2a) 2p

Welche Kraft wirkt auf den Tisch, wenn der Boden mit Frequenz ω und Amplitude q oszilliert? Nehmen Sie hier und in den darauffolgenden Teilaufgaben an, dass der Tisch so schwer ist, dass er sich nicht bewegt. Wir versuchen nur die Kraft auf den Tisch, die über die Feder wirkt zu berechnen. gegeben dass sich der Boden hebt und senkt mit einer gegebenen Frequenz und Amplitude. Das sollte relativ einfach sein und keine Rechnung benötigen.

11.2b) 3p

Um die die Isolierung zu verbessern, ersetzen wir das mittlere Drittel der Feder mit einem Aluminiumblock der Masse m. Das verbraucht 1/3 der Länge des Tischbeins; sodass das Tischbein jetzt eine Feder mit Konstante D, ein Block der Masse m und eine weitere Feder mit Konstante D ist. Eine vereinfachte Version ist im Bild zu sehen. Unter der Näherung, dass der Tisch bewegungslos ist und dass der Boden mit Amplitude q und Frequenz ω oszilliert (Sie können annehmen, dass $q(t) = q\cos(\omega t)$ die Oszillation des Bodens beschreibt), finden Sie die Amplitude der Bewegung der Masse q_1. Bestimmen sie daraus die Kraft, die auf den Tisch wirkt. Wenn $\omega \gg \omega_0 \equiv \sqrt{D/m}$, ist die Kraft kleiner als in Teil a?



11.2c) 3p

Das hat so gut funktioniert, dass wir jetzt drei Federn mit der Konstante $3D/2$ und zwei Massen der Masse $m/2$ verwenden. Berechnen Sie erneut die Kraft, die in dieser Konfigurierung auf den Tisch wirkt.

11.2d) 3p

Was wäre, wenn wir vier Massen der Masse $m/4$ und fünf Federn mit Federkonstante $5D/2$ verwenden? Wenn $\omega = 20\omega_0$, berechnen Sie die Kraft für jedes der Systeme, die wir beschrieben haben (als Funktion von D und q).