Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022 Deadline: 22.04 11:30 Uhr
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1: Eine einfache Feder

Dieses Problem sollte einfach sein. Wenn es Ihnen schwer vorkommt, machen Sie es unnötig kompliziert.

Betrachten Sie einen kleinen Ball mit Masse $M = 1\,\mathrm{kg}$, der an einer Feder hängt. Die Energie hängt von der vertikalen Position des Balls z ab durch $V = \frac{K}{2}(z - z_0)^2$, mit $K = 1\,\mathrm{J/m^2}$ der Federkonstanten. Der Ball bewegt sich in diesem Problem ausschließlich vertikal (in z-Richtung).

1.1a)

Angefangen bei Newtons zweitem Gesetz und unter der Verwendung von $F = -dV/dz$, finden Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Bewegung des Balls.

1.1b)

Angenommen der Ball hat Anfangsposition z und Anfangsgeschwindigkeit v, wie lautet seine Position als Funktion der Zeit?

Aufgabe 1.2: Ein Torwart führt einen Abstoß aus

Dieses Problem sollte auch einfach sein, aber die letzteren Teile benötigen womöglich kurzes Überlegen.

Der Torwart führt einen Abstoß elf Meter vor der Mitte des Tors aus. Er schießt nach oben und gerade nach vorn mit Geschwindigkeitskomponenten v_z (vertikale Komponente) und v_h (horizontale Komponente). Der Ball wird von der Schwerkraft beeinflusst mit einer Stärke von $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Sie sollten den Luftwiderstand ignorieren. Ignorieren Sie außerdem die Ausdehnung des Balls für dieses Problem (betrachten Sie Ihn als Punkt). Nehmen Sie an, dass der Torwart direkt stehen bleibt, nachdem der Ball geschossen wurde.

Berechnen Sie die Trajektorie des Balls $\vec{r}(t)$...

1.2a)

Im Koordinatensystem, in dem z die vertikale Richtung angefangen am Boden ist, x nach vorne zeigt (aus Sicht des Torwarts) und dessen Ursprung auf der Torlinie in der Mitte des Tors liegt.

1.2b)

In einem Koordinatensystem, das genauso aussieht, nur dass der Ursprung jetzt in der Ecke des Spielfelds liegt. (Das Spielfeld ist 70 Meter breit.)

1.2c)

Im Koordinatensystem, in dem x der Abstand zur Spielfeldecke in Richtung Osten und y der Abstand zur Spielfeldecke in Richtung Norden ist. Die lange Seite des Spielfelds erstreckt sich in Richtung Südosten von der Ecke und die Kurze Seite (mit dem Tor darauf) erstreckt sich nordöstlich von der Ecke.

1.2d)

In dem Bezugssystem, in dem der Ursprung *anfangs* auf der Torlinie in der Mitte des Tors liegt, **aber** der Ball anfangs in Ruhe ist und der Torwart sich mit den Gschwindigkeitskomponenten $-v_z$ und $-v_h$ bewegt. Beschreiben Sie in diesem System *sowohl* die Trajektorie des Balls, *als auch* die Trajektorie des Torwarts. Zeigen Sie, dass sich der x und z Abstand des Balls vom Torwart genauso entwickelt wie in 1.), aber mit anderer Interpretation.

Aufgabe 1.3: Überdenken der Anfangsbedingungen 5p

In dieser Aufgabe sehen wir, dass wir ein Problem basierend auf den Anfangs- und Endbedingungen lösen können, statt der Anfangspostion und Anfangsgeschwindigkeit. Sie werden das *womöglich* einfach finden, *womöglich* aber auch schwierig – Ich bin mir nicht sicher.

Betrachten Sie Problem 2, Teil 1. Aber anstatt dass Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Balls kennen, nehmen Sie an, dass Sie stattdessen wissen, dass der Ball 4 Sekunden nachdem er geschossen wurde in einem Abstand von 64 Metern von dem Punkt landet, von dem aus er geschossen wurde.

Behandeln Sie v_z und v_h als Unbekannte. Lösen Sie nach der Trajektorie des Balls $\vec{r}(t)$. Benutzen Sie dann die Angaben zur Endposition, um die Anfangsgeschwindigkeiten zu bestimmen, und dadurch die volle Trajektorie des Balls.

Dieses Problem ist ein Beispiel dafür, dass man, wenn man eine Differentialgelichung 2. Ordnung löst, entweder $\vec{r}(t_0)$ und $\dot{\vec{r}}(t_0)$ (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit) als Daten verwenden kann, oder aber $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{r}(t_1)$ (Anfangs- und Endposition).

Aufgabe 1.4: Unsere erste Zwangsbedingung

1.4a)

In diesem Problem haben wir es mit Zwangsbedingungen zu tun. Betrachten Sie ein Pendel, das am Ursprung hängt und das unter dem Einfluss der Schwerkraft der Stärke g in der (x, z)-Ebene schwingt. Das heißt, das Potential ist $V(\vec{r}) = gz$ (beachten Sie, dass z im allgemeinen negativ sein wird).

Das Pendel besteht aus einem kleinen Ball der Masse M an einer leichten starren Schnur der Länge L. Daher wird die Spannung der Schnur jeden Wert annehmen der nötig ist, damit immer $\sqrt{x^2 + z^2} = L$ gilt. Vernachlässigen Sie alles Lästige (die Größe und das Trägheitsmoment des Balls, die Masse und Dehnbarkeit der Schnur, den Luftwiderstand, Reibung, jedes Nachgeben der Pendelbefestigung).

Schreiben Sie alle Kräfte auf, die auf das Pendel wirken (Schwerkraft und Spannung) und finden Sie eine Differentialgleichung für die Entwicklung von (x, z) mit der Zeit.

1.4b)

Nehmen Sie an wir hängen ein zweites Pendel an das Ende des ersten Pendels. Das zweite Pendel hat die Masse M_2 und eine Schnur der Länge L_2. Auch diese Schnur ist starr, sodass sie immer die selbe Länge hat. *Versuchen* Sie ein vollständiges Gleichungssystem aufzuschreiben, das beschreibt, wie die Koordinaten des ersten Balls (x, z) und die des zweiten Balls (x_2, z_2) sich mit der Zeit ändern. Kommen Sie so weit wie Sie können. Wenn Sie ambitioniert sind und die Differentialgleichungen haben (2p extra), versuchen Sie sie zu lösen. Was macht diesen Teil der Aufgabe so schwierig?