Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 3

Deadline: 6.05. 23 Uhr online

Aufgabe 3.1: Ein gerader Weg. 5p.

In der Abwesenheit eines Potentials fliegt ein Teilchen (der Masse M) auf einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit v_0 (nach Newtons zweitem Gesetz). Das Teilchen startet bei $x(0) = 0$ und entwickelt sich nach $x(t_f) = x_f \equiv v_0 t_f$. Wir wollen sehen, dass diese Lösung die Wirkung strikt minimiert.

3.1a)

Schreiben Sie einen Ausdruck für die Wirkung in einer Dimension auf.

3.1b)

Schreiben Sie $x(t) = v_0 t + f(t)$ und schreiben Sie ihren Ausdruck für die Wirkung mittels dieser Form um. Was sind die Randbedingungen für $f(t)$? Ist das ein spezieller Fall? (das heißt, haben wir durch das betrachten dieser Form von $x(t)$ irgendeine Allgemeinheit verloren?)

3.1c)

Zeigen Sie dass der lineare Term in $\dot{f}(t)$ bei der Integration verschwindet, während der quadratische Term $\dot{f}^2(t)$ nicht negativ ist und nur Null ist, wenn überall $f = 0$.

Aufgabe 3.2: Es werde Licht. 7p.

3.2a)

Zeigen Sie, dass der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten eine gerade Linie ist. Um das zu tun, arbeiten Sie in zwei Dimensionen und wählen Sie Koordinaten, in denen der Start- und Endpunkt $(0, 0)$ und $(x_f, 0)$ sind und betrachten Sie $y = y(x)$. Schreiben Sie einen Ausdruck für den Gesamtabstand mittels $y(x)$ auf und zeigen Sie, dass er minimiert ist, wenn $y(x) = 0$.

3.2b)

Die Zeit, die Licht braucht um eine Entfernung ℓ zurückzulegen ist ℓ/c im Vakuum, aber $n\ell/c$ in einem Medium mit Brechungsindex n (und Lichtgeschwindigkeit c/n).

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht, welches von Punkt $\vec{r}_1$ nach Punkt $\vec{r}_2$ geht, den Weg nimmt, der die kürzeste Zeit benötigt. Zeigen Sie, dass sich Licht im leeren Raum auf einer geraden Linie fortbewegt.

3.2c)

Betrachten Sie als nächstes Licht, das am Punkt $(0, -y_0)$ startet und nach $(x_f, +y_f)$ geht, mit y_0 und y_f positiven Abständen. Für $y < 0$ ist der Brechungsindex $n = 1$, während er für $y > 0$ $n = n_0 > 1$ ist (für Glas $n = 1.5$). Nehmen Sie an, dass das Licht $y = 0$ an einem Punkt $(x_0, 0)$ überquert. Argumentieren Sie, dass das Licht einen geraden Weg von $(0, -y_0)$ nach $(x_0, 0)$ nimmt und einen geraden Weg von $(x_0, 0)$ nach (x_f, y_f). Finden Sie die Gesamtzeit, die das Licht braucht, und benutzen Sie das Fermatsche Prinzip um nach x_0 aufzulösen. Zeigen Sie, dass die Einfalls- und Ausfallswinkel das Snellius-Gesetz befolgen.

Aufgabe 3.3: Es ist nie Glück. 7p.

Zeigen Sie als erstes, dass der Umfang eines Kreises mit Fläche A kleiner ist als der Umfang eines Quadrats mit Fläche A. Ist das Glück oder etwas tiefgründiges?

Betrachten Sie eine allgemeine Kurve, die wir in Polarkoordinaten schreiben werden als $r = r(\theta)$. Schreiben Sie einen Ausdruck für den Umfang der Kurve P auf und einen Ausdruck für ihre Fläche A. Durch Verwenden eines Lagrange-Multiplikators für A, sodass unsere "Wirkung" $S = P - \lambda A$ ist, finden Sie eine Gleichung für $r(\theta)$, die zeigt, dass es P bei festem A minimiert. Zeigen Sie, dass der Kreis $r = R$ eine Lösung ist, während alles, was Ecken hat, keine ist.

Zusatzpunkte: Ist $r = R$ die einzige Lösung? Wenn nicht, was sonst löst die Gleichung?