Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 4

Deadline: 13.05. 23 Uhr

Aufgabe 4.1: Corioliskraft. 3p.

Betrachten Sie eine Rackete, die in einen Orbit um die Erde ins Weltall geschossen wird. Der Orbit befindet sich 400km über der Erde, genauer gesagt über dem Äquator.

4.1a) 1p

Wie schnell muss sich die Rakete bewegen um in einem kreisförmigen Orbit zu bleiben? Der Radius der Erde beträgt 6370km, die Erdbeschleunigung an der Oberfläche beträgt 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ und die Stärke der gravitationellen Beschleunigung fällt ab wie $1/r^2$.

4.1b) 1p

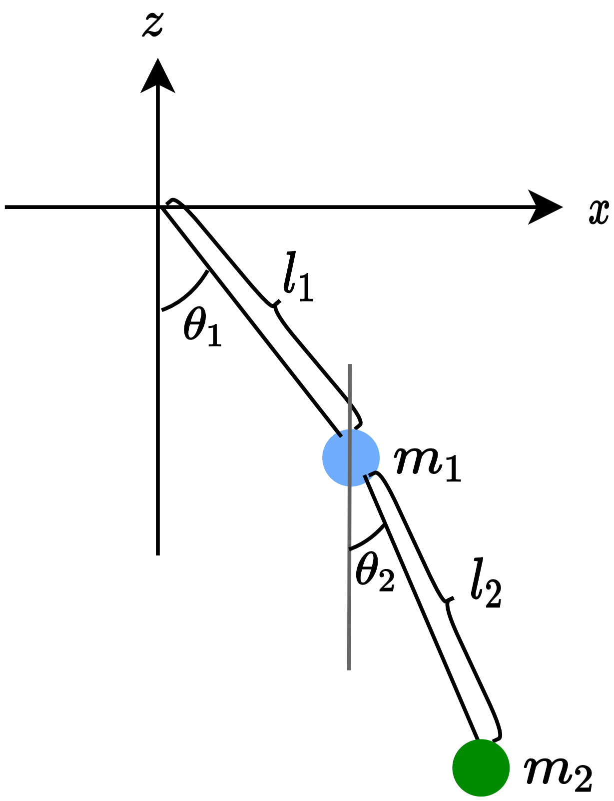
Angenommen, die Rakete fliegt nach Osten, mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Rakete über die Erdoberfläche, gemessen im Bezugssystem der Erde?

4.1c) 1p

Was ist, wenn die Rakete nach Westen fliegt? In welche Richtung ist es günstiger, eine Rakete in einen Orbit zu bringen?

Aufgabe 4.2: Doppelpendel. 8p

Ein Pendel schwingt in der (x,z)-Ebene. Die Schnur hat eine Länge von l_1 und die Pendellinse hat eine Masse von m_1; die Schnur hat eine vernachlässigbare Masse und dehnt sich nicht und die Aufhängung oben bewegt sich nicht. Ein zweites Pendel ist am Ende des ersten befestigt. Es bewegt sich auch in der (x,z)-Ebene und hat Länge l_2 und Masse m_2.



4.2a) 1p

Berechnen Sie mittels der beiden Winkel θ_1 und θ_2 als generalisierte Koordinaten die Geschwindigkeiten für beide Massen als Funktion von $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$.

4.2b) 2p

Verwenden Sie Ihre Ergebnisse des vorigen Teils, um die kinetische Energie T als Funktion von $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ zu schreiben.

4.2c) 1p

Schreiben Sie einen Ausdruck für die durch die Schwerkraft verursachte potentielle Energie auf.

4.2d) 4p

Schreiben Sie den Lagrange-Funktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen für beide Winkel her.

Hinweis: die Geschwindigkeit der zweiten Masse hängt von $\dot{\theta}_2$ *und* von $\dot{\theta}_1$ ab. Sie finden es womöglich einfacher ihre Geschwindigkeit mittels kartesischer Koordinaten zu berechnen, obwohl Sie vielleicht in der Lage sind, das ohne kartesische Koordinaten zu tun.

Aufgabe 4.3: Satelliten. 9p

Betrachten Sie einen Satelliten der Masse m im Orbit um die Erde. Die gravitative potentielle Energie ist $V = -G_N Mm/r$, wobei M die Masse der Erde ist. G_N ist Newtons Gravitationskonstante und r ist der Abstand des Satelliten zum Mittelpunkt der Erde.

4.3a) 2p

Schreiben Sie den Lagrangian des Systems in Kugelkoordinaten, $L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, und leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für jede Koordinate her.

4.3b) 3p

Schreiben Sie den Lagrangian in Polarkoordinaten um, $L(\rho, z, \varphi, \dot{\rho}, \dot{z}, \dot{\varphi})$. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für diese Koordinaten her.

4.3c) 4p

Schreiben Sie die Relationen zwischen den Koordinatenpaaren (r, θ) und (ρ, z) und zwischen $(\dot{r}, \dot{\theta})$ und $(\dot{\rho}, \dot{z})$ auf. Substituieren Sie diese Relationen in Ihre Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten, um diese Gleichungen wieder in Kugelkoordinaten auszudrücken. Zeigen Sie, dass das zu den selben Bewegungsgleichungen führt, die Sie in Kugelkoordinaten gefunden haben.