Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 6

Deadline: 27.05. 23 Uhr online

Aufgabe 6.1: Ein neuer Planet. 2p

Ein kleiner neuer Planet wird im Orbit zwischen Jupiter und Saturn gefunden. Seine große Halbachse ist der Durchschnitt (arithmetisches Mittel) der Werte für Jupiter und Saturn.

6.1a) 2p

Was ist seine Umlaufzeit in Jahren? (Jupiter umkreist die Sonne alle 11,9 Jahre und Saturn alle 29,5 Jahre. Das sind die einzigen Daten, die Sie brauchen sollten.)

Aufgabe 6.2: Zwei Quarks. 5p.

Zwei Quarks wechselwirken als ein Zweikörperproblem mit einer Zentralkraft. Die starke Wechselwirkung zwischen ihnen wird gut durch $V(r) = ar$ approximiert mit einer Konstanten a und dem Abstand r zwischen den Quarks. Die Massen sind m und M mit $M \gg m$.

6.2a) 2p

Berechnen Sie für den Fall eines Kreisförmigen Orbits die Umlaufzeit T als Funktion von m, r, a. Wie groß ist der Drehimpuls P_φ als Funktion von m, r, a?

6.2b) 3p

Betrachten Sie einen nahezu Kreisförmigen Orbit – kreisförmig plus kleine Oszillationen. Wie groß ist die Schwingungsfrequenz des radialen Abstands ω_{rad}? Ist $\omega_{rad} \cdot T = 2\pi$ (wie es für ein $1/r$ Potential der Fall ist)?

Aufgabe 6.3: Zentralkraft 12p

Betrachten Sie das Zentralkraftproblem mit Potential $V = kr^2/2$, die Lagrange-Funktion ist also

$$L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}kr^2 \tag{6.3.1}$$

6.3a) 2p

Berechnen sie die Periode T für einen kreisförmigen Orbit als Funktion von m, k, r. Hängt das Ergebnis von r ab?

6.3b) 2p

Berechnen Sie die Frequenz der radialen Oszillationen ω_{rad} für nahezu kreisförmige Orbits als Funktion von m, r, k.

6.3c) 2p

Woher wissen wir, dass der Drehimpuls p_φ und die Energie $E = T + V$ erhalten sind?

6.3d) 4p

Zeigen Sie, dass

$$E_x = \frac{m}{2}(\dot{r}\cos\varphi - r\sin(\varphi)\,\dot{\varphi})^2 + \frac{k}{2}r^2\cos^2\varphi \tag{6.3.2}$$

erhalten ist. (Es gibt mehrere Wege das zu tun. Einer ist, die Bewegungsgleichung zu finden, explizit dE_x/dt zu berechnen und die Bewegungsgleichungen zu verwenden, um zu zeigen, dass es null ist.)

6.3e) 2p

Schreiben Sie das Problem in kartesische Koordinaten um. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion als

$$L = L_x(x, \dot{x}) + L_y(y, \dot{y}) \tag{6.3.3}$$

geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Funktionen für x und für y unabhängig voneinander sind, sodass die x-Bewegung und die y-Bewegung komplett unabhängig sind. Hilft das, Ihre vorherigen Ergebnisse zu erklären?

6.3f) Bonus! 5p

Finden Sie die allgemeinst mögliche Lösung. Zeigen Sie, dass der Orbit einer Ellipse folgt, aber mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse, anstatt in einem Brennpunkt.

Aufgabe 6.4: Umlaufbahn der Erde. 3p.

Die Umlaufbahn der Erde ist tatsächlich elliptisch, mit Exzentrizität $e = 0.0167$.

6.4a)

Was ist das Verhältnis zwischen den Abständen am Aphel und am Perihel?

6.4b)

Was ist das Verhältnis zwischen der schnellsten und der langsamsten Geschwindigkeit der Erde?
Tipp: Der Drehimpuls ist erhalten.

6.4c)

Was ist das Verhältnis b/a zwischen kleiner und großer Halbachse?