Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 7

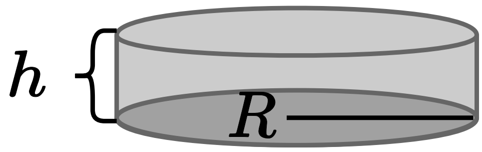
Deadline: 03.06. 23 Uhr online

Aufgabe 7.1: Eine Servierschüssel. 6p.

Betrachten Sie eine Servierschüssel, die aus einer dünnen flachen Scheibe mit gleichmäßiger Masse pro Fläche und Radius R besteht, sowie einem Zylindermantel mit dem selben Radius und Masse pro Fläche, der am Rand der Scheibe eine Höhe von $h = R$ aufragt. Die Gesamtmasse ist M.

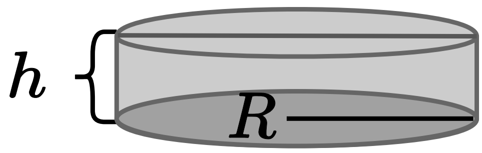
7.1a) 3p

Finden Sie den Schwerpunkt. Wählen Sie einen Satz von Koordinaten und berechnen Sie den Drehimpulstensor. (Hinweis: wählen Sie eine einfachen Koordinatensatz.) Ist das Ergebnis dreiachsig, symmetrisch, oder sphärisch?



7.1b) 3p

Fügen Sie einen dünnen Balken auf der Oberseite der Schüssel hinzu (vielleicht, um sie daran zu halten?), der entlang des Durchmessers des Kreises verläuft, mit einer Masse gleich $M/4$. Was ist der Trägheitstensor, mit der Ergänzung dieses Balkens? Ist er dreiachsig, symmetrisch, oder sphärisch? Was sind die Hauptachsen?



Aufgabe 7.2: Instabile Rotationen. 4p

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein Buch mit Komponenten des Trägheitsmomentes $I_1 < I_2 < I_3$ die Bewegungsgleichungen

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{7.2.1}$$

erfüllt, und wir haben gezeigt, dass die Zeitentwicklung für $|\omega_1| \gg |\omega_2|, |\omega_3|$ oder $|\omega_3| \gg |\omega_1|, |\omega_2|$ stabil ist – das dominante ω bleibt dominant. Doch wenn ω_2 dominiert tritt eine Instabilität auf und die kleineren Komponenten wachsen an.

Doch was passiert wenn wir I_2 verkleinern und I_1 erhöhen? Wie verändert sich die Stabilität?

Um das zu untersuchen, betrachten wir den Fall $I_1 = I_2$.(Das wäre der Fall, wenn das Buch einen Quadratischen Buchrücken hat, d.h. das Buch ist genau so breit wie lang.) Nun gelten immer noch die selben Bewegungsgleichungen, doch sie implizieren etwas anderes.

Betrachten Sie den Fall, dass $|\omega_3|$ klein aber ungleich Null ist und das *am Start* ω_1 groß ist und $\omega_2 = 0$.

7.2a)

Zeigen Sie, dass sich ω_3 nicht ändert. Zeigen Sie, dass das immer noch gilt, selbst wenn ω_1, ω_2 beide ungleich Null sind.

7.2b)

Zeigen Sie, das ω_2 zu Beginn (für kurze Zeiten, solange $|\omega_2| \ll \omega_1$) *linear* mit der Zeit anwächst. Dieses Verhalten ist *intermediär* zwischen oszillierendem und exponentiell anwachsendem Verhalten (die Verhalten die wir für $I_2 > I_1$ oder $I_2 < I_1$ gefunden hätten).

7.2c)

Zeigen Sie, dass die Gleichungen für ω_1 und ω_2 für alle Zeiten durch

$$\begin{cases} \omega_1 &= \omega_0\cos(\tilde{\omega}t) \\ \omega_2 &= \omega_0\sin(\tilde{\omega}t) \end{cases} \tag{7.2.2}$$

gelöst werden, wobei $\omega_0 = \omega_1(t = 0)$ der Startwert von ω_1 ist und $\tilde{\omega}$ eine konstante (zeitunabhängige) Frequenz ist, nach der Sie lösen müssen.

Aufgabe 7.3: Der Kreisel. 10p.

Betrachten Sie einen schweren Kreisel mit Hauptdrehimpulskomponenten $I_1 = I_2 = I$ und $I_3 \neq I$. Er sitzt im Schwerefeld der Erde. Der Ursprung der Koordinaten in beiden, dem inertialen und dem körperzentrierten Koordinatensystem, befindet sich an der Spitze des Kreisels.

7.3a) 2p

Erklären Sie, warum die Lagrange-Funktion des Problems

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta \tag{7.3.1}$$

ist. Hier ist m die Masse, l ist der Abstand vom Schwerpunkt zur Spitze, g ist die Stärke der Schwerkraft und φ, θ, ψ sind die Euler-Winkel.

7.3b) 2p

Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die assoziierten kanonischen Impulse?

7.3c) 2p

Schreiben Sie die Energie ausgedrückt durch den/die zyklischen kanonischen Impuls/Impulse und die nichtzyklischen Variablen und ihre Zeitableitungen.

7.3d) 2p

Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für den Winkel θ.

7.3e) 2p

Zeigen Sie aus dem vorigen Teil, dass nutationsfreie Präzession möglich ist, das heißt, $\dot{\theta} = 0$ aber $\theta \neq 0$. Was geschieht mit der zyklischen Variable? Erörtern Sie sorgfältig die möglichen Lösungen der Präzessionsfrequenz $\dot{\varphi}$.