Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 8

Deadline: 10.06. 23 Uhr online

Aufgabe 8.1: Ein wohlbekanntes Paar. 4p.

Um numerisch mit Differentialgleichungen vertraut zu werden, betrachten Sie das folgende Paar gekoppelter ODEs: die Funktionen s und c hängen durch

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = -s(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = +c(t) \end{cases} \tag{8.1.1}$$

von der Zeit t ab, mit den Anfangsbedingungen $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$.

8.1a)

Lösen Sie diese Gleichungen numerisch. Was sind die korrekten analytischen Antworten? Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse bei $t = 2$ mit dem bekannten analytischen Ergebnis.

Aufgabe 8.2: Chaos. 10p.

Betrachten Sie ein massives Teilchen in der (x, y)-Ebene, mit dem Lagrangian

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - a(x^4 + y^4) - bx^2y^2 \tag{8.2.1}$$

Hier sind a, b reele Parameter

8.2a)

Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für x und für y auf. Drücken Sie diese erneut als ein System aus vier erste Ordnung ODEs für die Variablen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ aus.

8.2b)

Lösen Sie diese Gleichungen numerisch für die Anfangsbedingungen: $x(0) = 1.0, y(0) = 0.0, \dot{x}(0) = 0.0, \dot{y}(0) = 0.5$, sowie für die selben, aber mit $y(0) = 0.0001$, für jede der folgenden Parametersätze:

- $m = 1, \quad a = 1, \quad b = -1$
- $m = 1, \quad a = 1, \quad b = 0$
- $m = 1, \quad a = 1, \quad b = 2$
- $m = 1, \quad a = 1, \quad b = 8$

Für welche Parametersätze ist die Evolution chaotisch? Für welche sieht es so aus, als wäre sie nicht chaotisch?

8.2c)

Die Fälle, die nicht chaotisch sind, haben jeweils eine zusätzliche Erhaltungsgröße neben der Energie. Was ist diese zusätzliche Erhaltungsgröße für jeden der Fälle? (Die Anwesenheit von zwei Erhaltungsgrößen mit zwei Koordinaten ist hinreichend, um sicherzustellen, dass die Evolution nicht chaotisch ist.)

8.2d)

Vorhersagen, noch einen b-Wert, wobei die Evolution nicht kaotisch ist. Was ist die neue Erhaltungsgröße?

Aufgabe 8.3: Eine Murmel. 10p

Eine Murmel rollt ohne zu rutschen in einer parabolischen Schüssel unter dem Einfluss der Schwerkraft, $V(z) = gmz$. Die Tatsache das sie rollt bedeutet nur, dass $T = \frac{1}{2}mv^2$ mit $T = \frac{7}{10}mv^2$ ersetzt wird. Dass es eine parabolische Schüssel ist, bedeutet, dass $z = (x^2 + y^2)/(2R)$ mit R der Brennweite der Parabel.

8.3a)

Schreiben Sie den Lagrangian für dieses System in radialen Koordinaten.

8.3b)

Finden Sie die kanonischen Impulse. Gibt es eine zyklische Koordinate?

8.3c)

Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für r und für θ auf.

8.3d)

Finden Sie den Hamiltonian $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$. Vorsicht.

8.3e)

Finden Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass sie äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gleichungen sind.