Theoretische Physik I: Klassische Mechanik - Übungsblatt

Prof. Dr. Guy Moore

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2022
Übungsblatt 9

Deadline: 17.06. 23 Uhr online

Aufgabe 9.1: Einige Klammern. 10p.

9.1a) 10p

Berechnen Sie jede der folgenden Poisson-Klammern. Hier ist $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Drehimpuls. Sie finden es womöglich am einfachsten mittels Indexnotation zu rechnen und $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ zu schreiben. Es sollte Ihnen möglich sein, Ihre Rechnungen nur mittels der Eigenschaften der Poisson-Klammern durchzuführen, ohne irgendeine wirkliche Ableitung zu bilden.

$$\left[L_i, r_j\right] \qquad \left[L_i, p_j\right] \qquad \left[L_i, L_j\right] \qquad \left[L_i, L^2\right] \tag{9.1.1}$$

Hintergrund: Im Allgemeinen ist die Poisson-Klammer des Drehimpulses L_i mit irgendeinem Vektor $\vec{v}$ gleich $[L_i, v_j] = \epsilon_{ijk} v_k$. Für irgendeine skalare Größe s hingegen, $[L_i, s] = 0$. Sie können erkennen, dass die Poisson-Klammer mit L_i etwas mit der Rotation der Koordinaten zu tun hat, auf die selbe Art und Weise, wie die Poisson-Klammer mit H etwas mit der Zeitentwicklung zu tun hat. Diese Themen werden in Ihrer Quantenmechanik-Vorlesung wieder aufgegriffen!

Aufgabe 9.2: Ein Test für den Satz von Liouville.

Hier sehen wir, wie der Satz von Liouville kompatibel mit dem exponentiellen Wachstum der Unterschiede zwischen ähnlichen Anfangsbedingungen ist.

Kehren Sie zum Lagrangian zurück, den wir in den numerischen Übungen gefunden haben,

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - D_1(x^4 + y^4) - D_2 x^2 y^2 \tag{9.2.1}$$

Hier werden wir das Problem numerisch betrachten, mit der Wahl $m = 1$, $D_1 = 1$ und $D_2 = -1$.

9.2a) 2p

Finden Sie den Hamiltonian $H(x, y, p_x, p_y)$.

9.2b) 2p

Betrachten Sie die folgenden fünf Anfangswerte bei $t = 0$:

$$\begin{aligned}
(x, y, p_x, p_y)_A &= (1, 0, 0, 1) \\
(x, y, p_x, p_y)_B &= (1.001, 0, 0, 1) \\
(x, y, p_x, p_y)_C &= (1, 0.001, 0, 1) \\
(x, y, p_x, p_y)_D &= (1, 0, 0.001, 1) \\
(x, y, p_x, p_y)_E &= (1, 0, 0, 1.001)
\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Berechnen Sie die Werte von (x, y, p_x, p_y) zu den Zeiten: $t = 1$, $t = 3$, $t = 10$ numerisch.

9.2c) 2p

Berechnen Sie jeden Abstand $||(x,p)_B - (x,p)_A||$, $||(x,p)_C - (x,p)_A||$ usw. zwischen A und jedem anderen Punkt, zur Anfangszeit und zu jeder nachfolgenden Zeit $t = 1, 3, 10$.
Hier ist der Abstand $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (p_{xB} - p_{xA})^2 + (p_{yB} - p_{yA})^2}$ usw. Nehmen die Abstände mit der Zeit zu?

9.2d) 2p

Wir können den Punkt $(x_A, y_A, p_{xA}, p_{yA})$ als die untere Ecke eines Parallelotops betrachten (die N-dimensionale Verallgemeinerung eines Parallelepipeds), im 4-dimensionalen Phasenraum (x, y, p_x, p_y) mit (B, C, D, E) den vier benachbarten Ecken. Das 4-Volumen eines solchen Parallelotops ist

$$V = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} (x_B - x_A) & (y_B - y_A) & (p_{xB} - p_{xA}) & (p_{yB} - p_{yA}) \\ (x_C - x_A) & (y_C - y_A) & (p_{xC} - p_{xA}) & (p_{yC} - p_{yA}) \\ (x_D - x_A) & (y_D - y_A) & (p_{xD} - p_{xA}) & (p_{yD} - p_{yA}) \\ (x_E - x_A) & (y_E - y_A) & (p_{xE} - p_{xA}) & (p_{yE} - p_{yA}) \end{bmatrix} \tag{9.2.3}$$

Berechnen Sie dieses Volumen zu jeder Zeit aus Ihren numerisch bestimmten Koordinaten. Nimmt das Volumen mit der Zeit zu? Wie nimmt es zu, verglichen mit der Zunahme des Abstands zwischen den Punkten?

9.2e) 2p

Wenn wir den Anfangsabstand klein genug machen und die numerische Präzision gut genug ist, dann sollte das Volumen nicht zunehmen. Warum nicht? Wie können wir sicher sein?