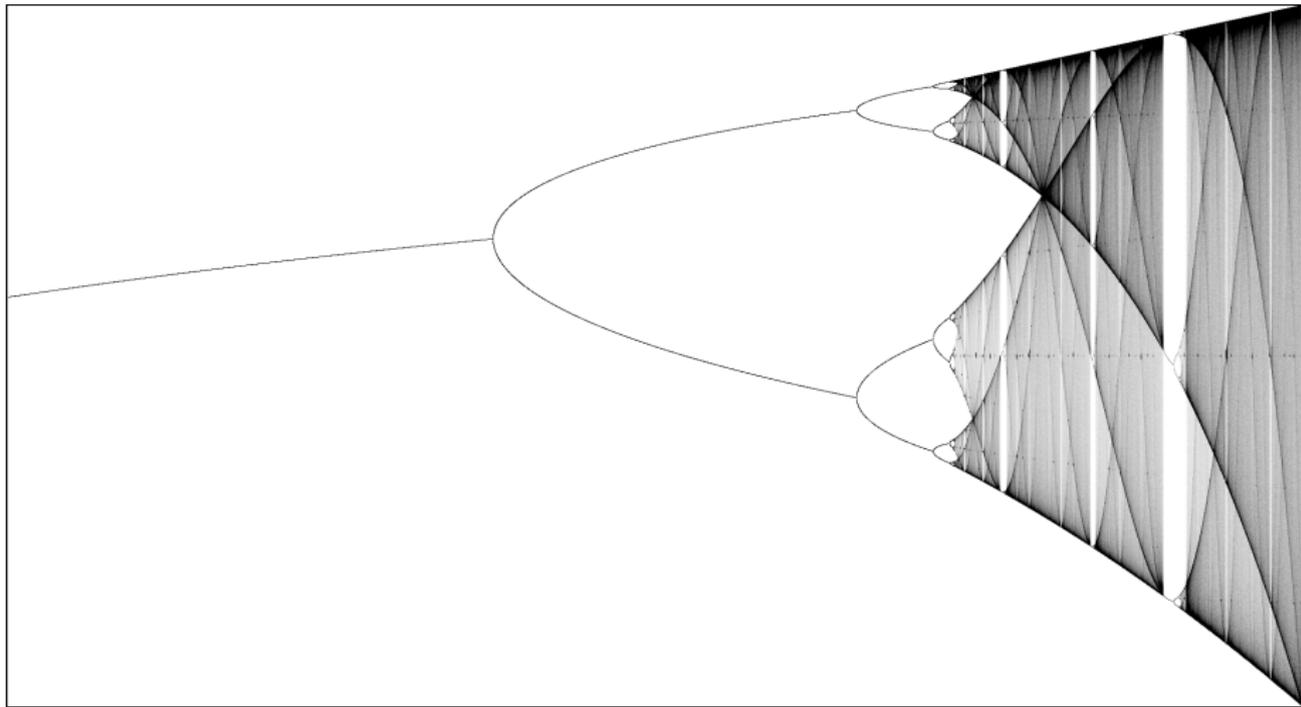


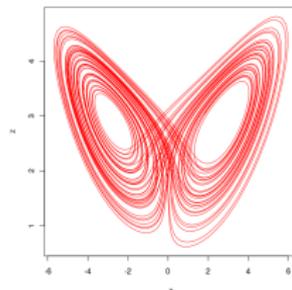
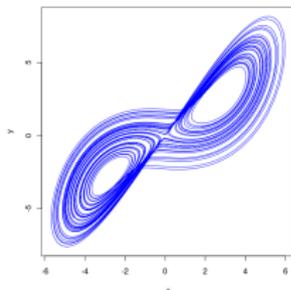
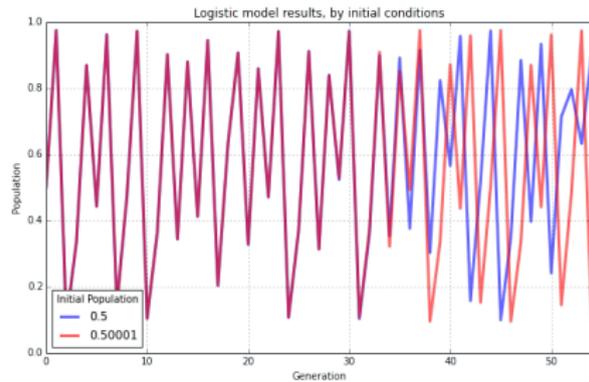
Feigenbaum, Chaos und die RG



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- ▶ nichtlineare Systeme in letzter Zeit wieder reges Forschungsgebiet
 - ▶ Ermöglichung der Untersuchung nicht-integrabler Systeme durch Computer
- ▶ Anfänge der Chaostheorie: Arbeiten von Edward Lorenz (um 1960)
 - ▶ math. Modell der Atmosphäre
 - ▶ sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
- ▶ heute: Untersuchung eines „Phasenübergangs“ ins Chaos



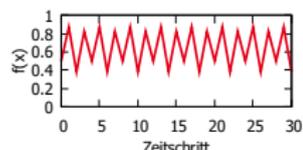
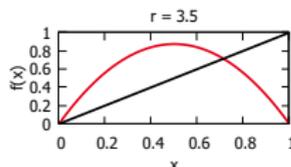
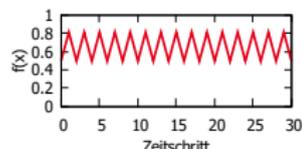
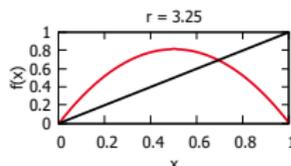
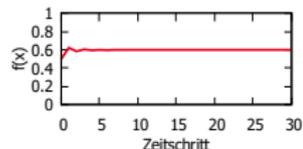
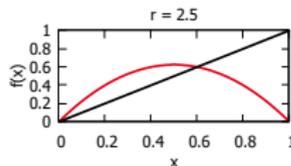
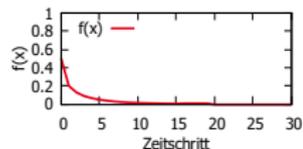
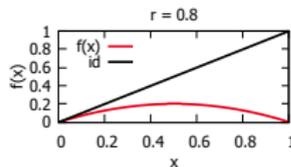
Die logistische Abbildung ...

- ▶ ist definiert als:

$$f(x) = rx(1 - x), r \in [0, 4]$$

- ▶ zeigt unterschiedliches Verhalten:

- ▶ $0 \leq r \leq 1$: $x^* = 0$ stabil
- ▶ $1 < r \leq 3$: $x^* \neq 0$ stabil
- ▶ $3 < r \leq 3.45$: Oszillationen mit Periode 2
- ▶ $3.45 < r \leq 3.54$: Oszillationen mit Periode 4
- ▶ ...
- ▶ $r > r_c \approx 3.57$: chaotisches Verhalten



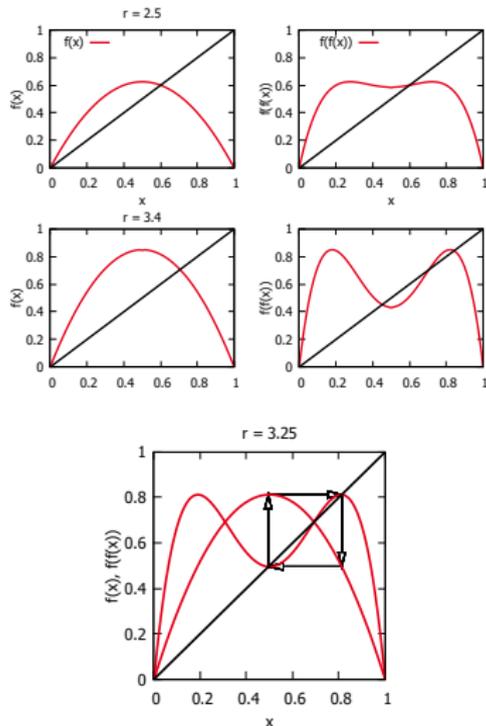
Logistische Abbildung

Periodenverdopplungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

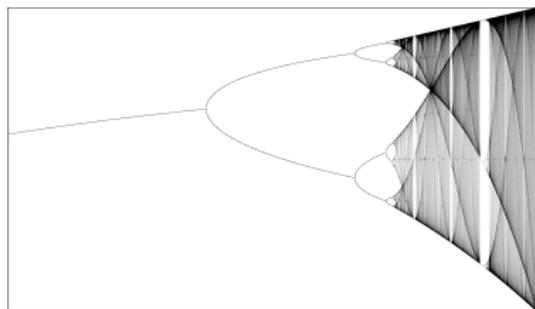
- ▶ für $r \rightarrow r_c$ durchläuft die logistische Abbildung eine Reihe von Periodenverdopplungen
- ▶ **Periodenverdopplung:** stabiler Orbit der Länge 2^k wird instabil und ein stabiler Orbit der Länge 2^{k+1} entsteht
 - ▶ geschieht, wenn $|f'(x^*, r)| = 1$
 - ▶ für alle Punkte gleichzeitig:
$$\frac{d}{dx} f^{(2^n)}(x)|_{x=x^*} = \prod_{k=0}^{2^n-1} f'(x_k^*)$$
- ▶ Periodenverdopplungen als „Weg ins Chaos“



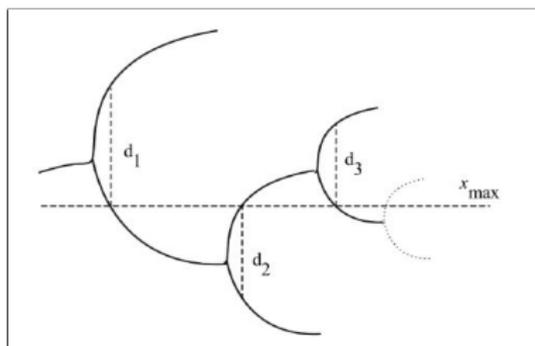
Logistische Abbildung

Feigenbaum-Konstanten

- ▶ logistische Abbildung vollzieht Übergang zum Chaos durch Periodenverdopplungen
- ▶ Chaos beginnt bei $r_c \approx 3.57$
- ▶ Feigenbaum-Konstanten:
 - ▶ $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \approx 4.6692$
 - ▶ $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \approx -2.5029$
 - ▶ charakterisieren horizontale bzw. vertikale Längenskala des Bifurkationsdiagramms



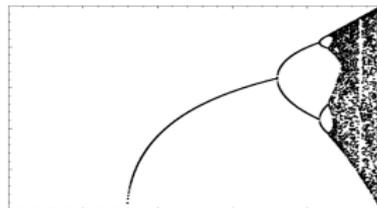
Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung.



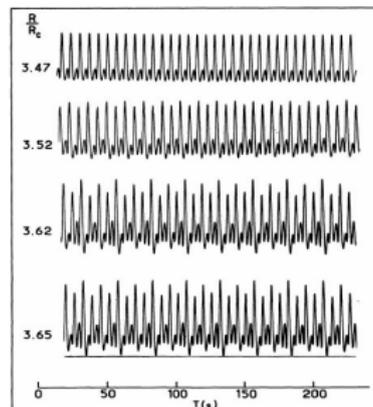
Logistische Abbildung

Universalität

- ▶ α und δ **nicht** speziell für logistische Abbildung!
- ▶ andere Abbildungen:
 - ▶ $f_r(x) = r \sin(\pi x), 0 \leq r \leq 1$
 - ▶ $f_r(x) = r(1 - x^2)(2x - x^2), 0 \leq r \leq \frac{9}{16}$
- ▶ physikalische Systeme:
 - ▶ Experimente zur Rayleigh-Bénard-Konvektion in Hg [5]
→ $\delta = 4.4 \pm 0.1$
- ▶ Universalität?
→ mit RG-Methoden untersuchen



Bifurkationsdiagramm der Sinus-Abbildung.



Periodenverdopplung im Experiment.

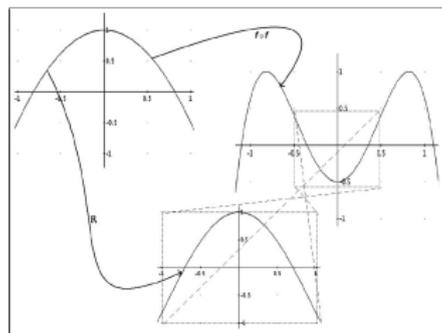
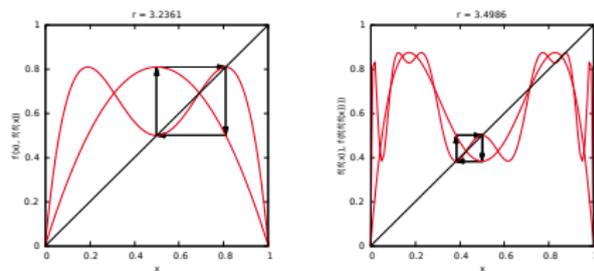
- ▶ \mathcal{U} : Raum von Familien einparametrischer Abbildungen $\{f_r\}$ mit „guten“ Eigenschaften
 - ▶ $\mathcal{U} = \{f : I \rightarrow I, f \text{ regulär, unimodal, quad. Maximum}\}$
 - ▶ setze: $I = [-1, 1]$ und $f_r(0) = 1$
- ▶ Universalität sollte Eigenschaft von \mathcal{U} unter Anwendung eines renormierenden Operators $\mathfrak{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ sein

RG-Formalismus

Renormierungsoperator \mathfrak{R}

Eigenschaften von \mathfrak{R} :

- ▶ Abbildung von Zyklen mit Periode 2^n auf Zyklen mit Periode 2^{n-1}
 - ▶ coarse-graining der Zeitskala -
 $f \rightarrow f \circ f$
- ▶ $\mathfrak{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$
 - ▶ Reskalierung notwendig
 - ▶ $\mathfrak{R}(f) = \alpha f \circ f(\frac{x}{\alpha})$
- ▶ untersuche dynamisches System
 $\mathfrak{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$



Funktionsweise des Renormierungsoperators \mathfrak{R} .

RG-Formalismus

Bestimmung von α

- ▶ betrachte den Fixpunkt ϕ^* von \mathfrak{R}
- ▶ an dieser Stelle gilt: $\phi^*(x) = \mathfrak{R}(\phi^*)(x) = \alpha\phi^*(\phi^*(\frac{x}{\alpha}))$
- ▶ wissen: $\phi^*(0) = 1$
- ▶ Ansatz: $\phi^*(x) = 1 + \sum_{n=1}^N c_n x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2N+2})$
- ▶ Einsetzen in die Fixpunkt-Gl. und Lösen liefert Näherungen für α
 - ▶ $N = 3$: $\alpha \approx -2.479$, $c_1 \approx -1.522$, $c_2 \approx 0.073$, $c_3 \approx 0.046$
 - ▶ $N = 6$: $\alpha \approx -2.502897$
 - ▶ vergleiche: $\alpha \approx -2.502907875$
→ Näherung für $N = 6$ auf 10^{-6} genau!

- ▶ Übergang der Dynamik eindimensionaler Abbildungen $f_r(x)$ ins Chaos für $r \rightarrow r_c$ via Periodenverdopplung
 - ▶ Phasenübergang zwischen nicht-chaotischer und chaotischer Dynamik
 - ▶ kritischer Punkt: r_c
 - ▶ Auftreten des Attraktors mit Länge $2^\infty \leftrightarrow$ unendliche Korrelationslänge
- ▶ Abfolge der Periodenverdopplungen (asymptotisch) selbstähnlich
 - ▶ charakterisiert durch Feigenbaum-Konstanten α, δ
 - ▶ α, δ universell für bestimmte Klassen von Abbildungen
- ▶ Phasenübergang + Selbstähnlichkeit + Universalität \rightarrow RG-Methoden
 - ▶ Untersuchung des **RG flow** ermöglicht sehr gute Näherung von α und δ
 - ▶ für andere Klassen von Abbildungen: andere Werte von α und δ
 - ▶ z.B. quartisches Maximum: $\alpha \approx -1.69030297$ und $\delta \approx 7.28486622$

Ende



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Geschafft!
Fragen?



AGUIRRE, L. A., UND FURTADO, E. C.

Building dynamical models from data and prior knowledge: the case of the first period-doubling bifurcation.
Physical Review E 76, 4 (2007), 046219.

BOEING, G.

Visual analysis of nonlinear dynamical systems: Chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction.
Systems 4, 4 (2016), 37.

CCREWEB.

Darstellungen des Lorenz-Attraktors.

<http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/lorenz-circuit-2.png>.

[Stand: 14. Juli 2017].

CRESWICK, R., FARACH, H. A., UND POOLE, C.

Introduction to renormalization group methods in physics.
John Wiley & Sons, 1992.

LIBCHABER, A., LAROCHE, C., UND FAUVE, S.

Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement.
Journal de Physique Lettres 43, 7 (1982), 211–216.

SFONDRINI, A.

An introduction to universality and renormalization group techniques.
arXiv preprint arXiv:1210.2262 (2012).

WIKIMEDIA (NUTZER: PAR).

Bifurkationsdiagramm der logistischen Gleichung (eigene Überarbeitung).

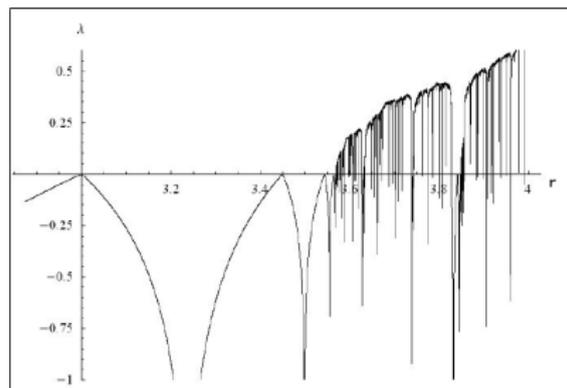
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LogisticMap_BifurcationDiagram.png.

[Stand: 11. Juli 2017].

RG-Formalismus

Konzept: superstabile Zyklen

- ▶ **Lyapunov-Exponent:** Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich benachbarte Punkte im Phasenraum voneinander entfernen
- ▶ am Bifurkationspunkt: $\lambda = 0$
- ▶ zwischen zwei Bifurkationen:
an einer Stelle $\lambda(\tilde{r}_n) = -\infty$
→ **superstabiler Zyklus**
- ▶ Werte \tilde{r}_n konvergieren wie die r_n mit Rate δ gegen $r_c \approx 3.57$

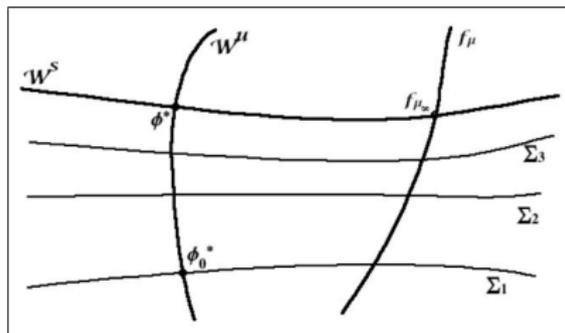


Lyapunov-Exponent der logistischen Abbildung für $r > 3$.

RG-Formalismus

Analyse von $\mathfrak{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$

- ▶ untersuche dynamisches System
 $\mathfrak{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$
- ▶ nehme zur Vereinfachung an:
 - ▶ $\exists \phi^* \in \mathcal{U}$ so, dass $\mathfrak{R}(\phi^*) = \phi^*$
 - ▶ nur ein EW von $\mathfrak{R}(\phi^*)$ relevant
 $\rightarrow \delta$
- ▶ Annahmen ermöglichen
Vorstellung der Struktur von \mathcal{U}

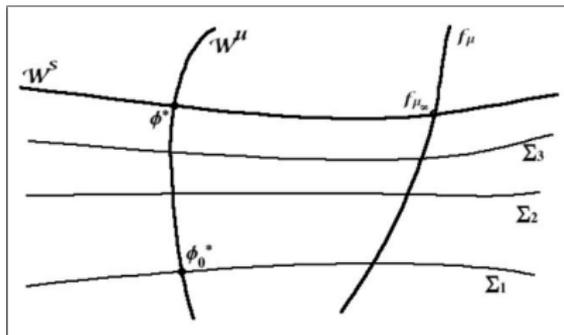


Struktur des Raums \mathcal{U} unter Anwendung von \mathfrak{R} .

RG-Formalismus

Bestimmung von δ

- ▶ betrachte die Stelle $f_{r_\infty} \in \mathcal{U}$
- ▶ $\mathfrak{R}(f_r)(x) \approx \mathfrak{R}(f_{r_\infty})(x) + (r - r_\infty)\mathfrak{R}_{f_{r_\infty}}\left(\frac{df_r}{dr}\bigg|_{r=r_\infty}\right)(x)$
- ▶ wissen: $f_{r_\infty} \in \mathcal{W}^s \cap \{f_r\}$
 $\rightarrow \mathfrak{R}^n(f_r)(x) \approx \phi^*(x) + (r - r_\infty)\mathfrak{R}_{\phi^*}^n\left(\frac{df_r}{dr}\bigg|_{r=r_\infty}\right)(x)$
- ▶ entwickle $\varphi(x) = \frac{df_r}{dr}\bigg|_{r=r_\infty}$ in Eigenfunktionen von \mathfrak{R}_{ϕ^*}
- ▶ für superstabile Abbildungen:
 $\phi^*(0) + (\tilde{r}_n - r_\infty)c_\delta\delta^n\phi_\delta(0) \approx 0$
- ▶ $(\tilde{r}_n - r_\infty)\delta^n \approx -\frac{\phi^*(0)}{c_\delta\varphi_\delta(0)} = \text{const.}$



Struktur des Raums \mathcal{U} unter Anwendung von \mathfrak{R} .

- ▶ die \tilde{r}_n konvergieren mit Rate δ
- ▶ löse also $\mathfrak{R}_{\phi^*}\varphi_\delta(x) = \delta\varphi_\delta(x)$
 - ▶ $N = 6 : \delta \approx 4.66914$
 - ▶ vergleiche: $\delta \approx 4.669201609$