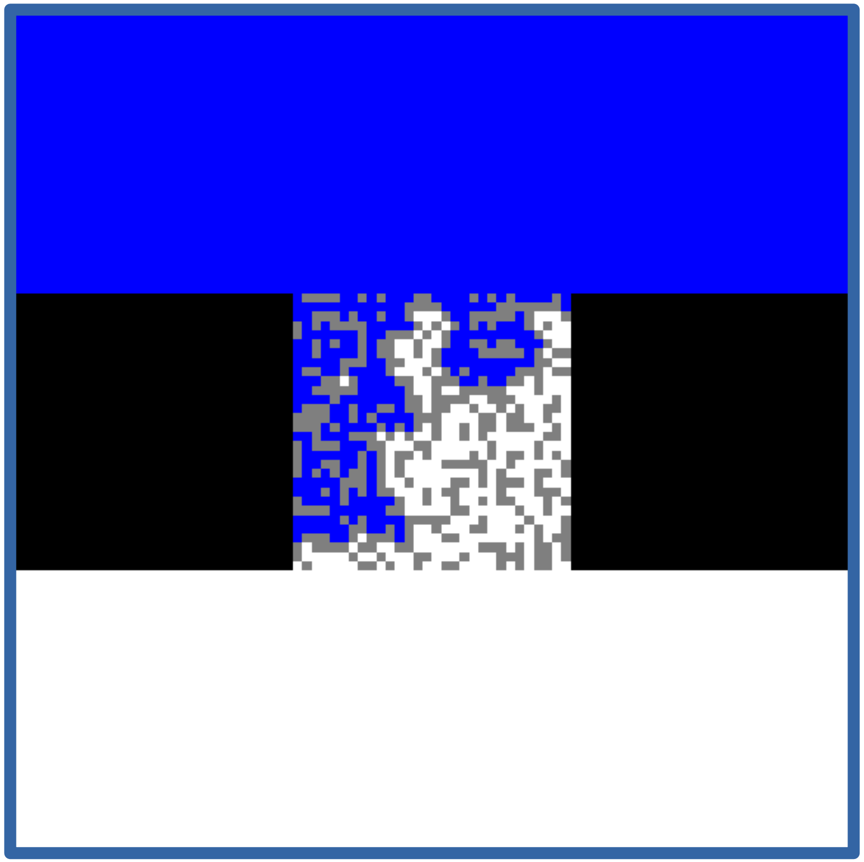
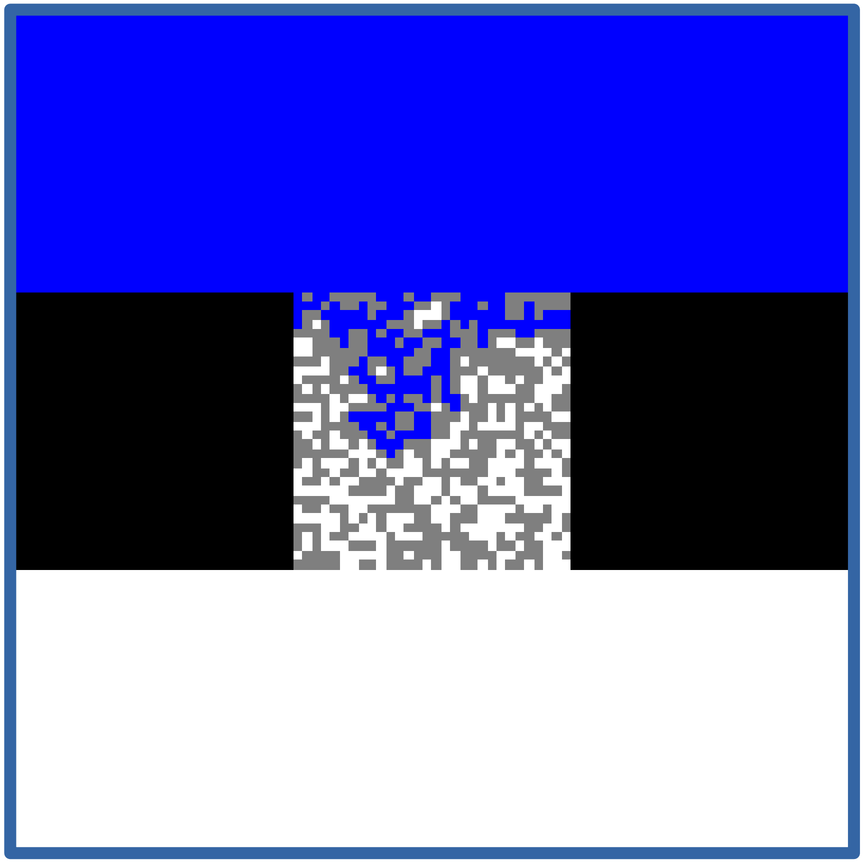
Perkolation
Zusammenhang mit RG





Agenda

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1.1 Einführung und Motivation

1.2 Grundlagen

2.1 Erzeugende Funktion

2.2 Perkolation in einer Dimension

2.3 Perkolation auf einem Cayley-Baum

3.1 RG – hierarchisches Gitter

3.2 RG – Dreiecksgitter

Einführung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Was ist Perkolation?

→ geometrisches Objekt

~> Gitter

→ Wahrscheinlichkeit p :

Teilstück des Objekts existiert

~> besetzter Gitterpunkt

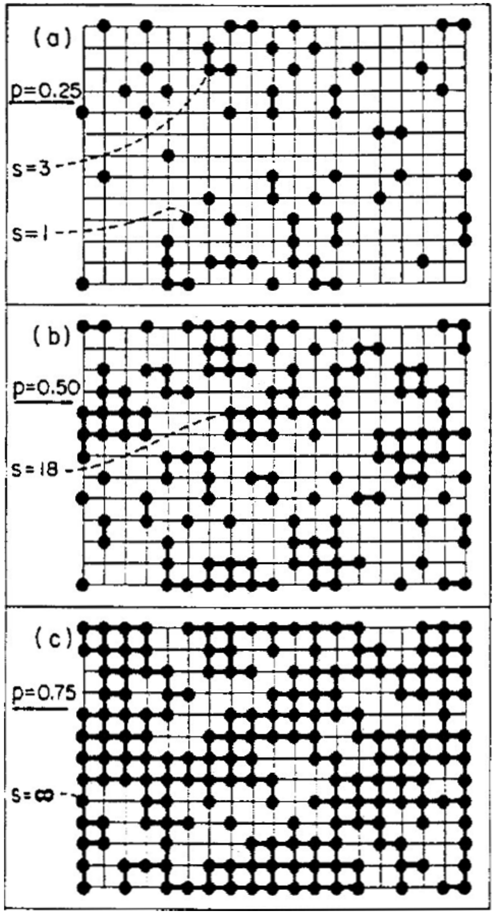
(Besetzungsperkolation;

→ Verbindungsperkolation)

→ Untersuchung der entstehenden Strukturen

~> Clustergröße, Perkolationsschwelle

Anwendungen?



[1]

Motivation

Anwendbar auf viele chemische und physikalische Phänomene

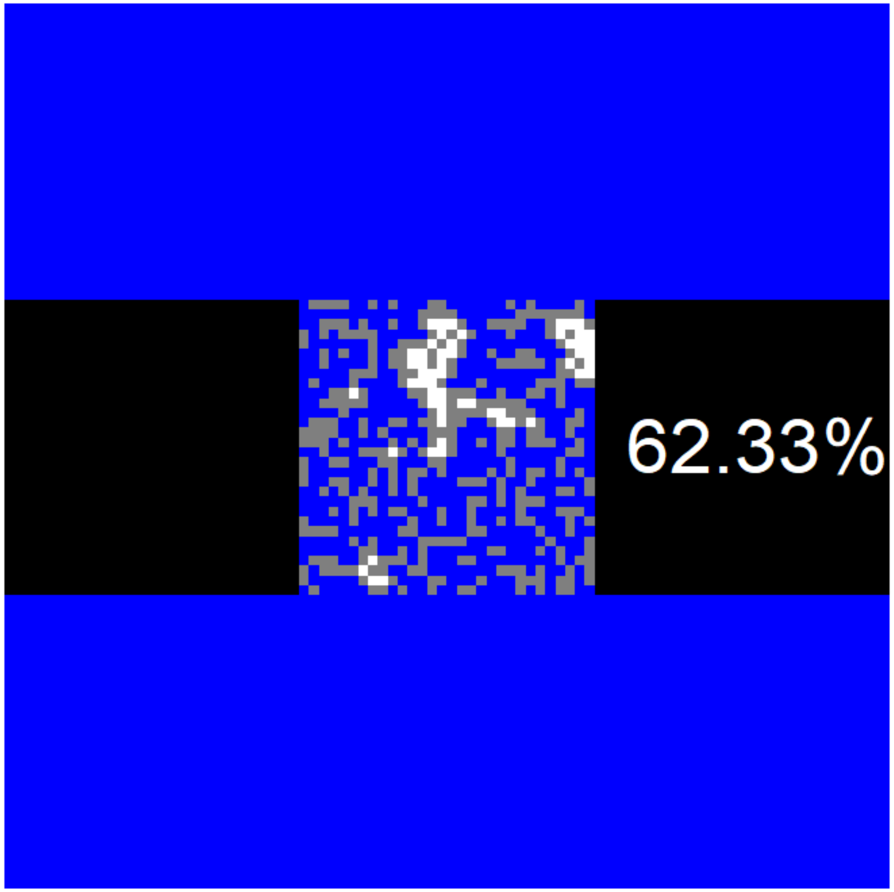
→ Eindringen einer Flüssigkeit in ein poröses Medium

→ Ausbreitung eines Feuers

→ Elektrische Leitfähigkeit zusammengesetzer Stoffe

→ Sol-Gel Übergang

→ ...



[2]

Grundlagen - Begriffe

Besetzungswahrscheinlichkeit p

Perkolationsschwelle p_c

Größenverteilung $n_s(p) = \sum_b g_{sb}\, p^s (1-p)^b$

$\rightarrow$ Anteil Cluster Größe s

$\rightarrow$ Anordnungen g_{sb} ~> „lattice Animals“

$\rightarrow$ Wichtig: ohne unendlichen Cluster

Anteil des unendlichen Clusters P

$\rightarrow$ Ordnungsparameter

$\rightarrow$ Skalierung: $(p - p_c)^\beta$

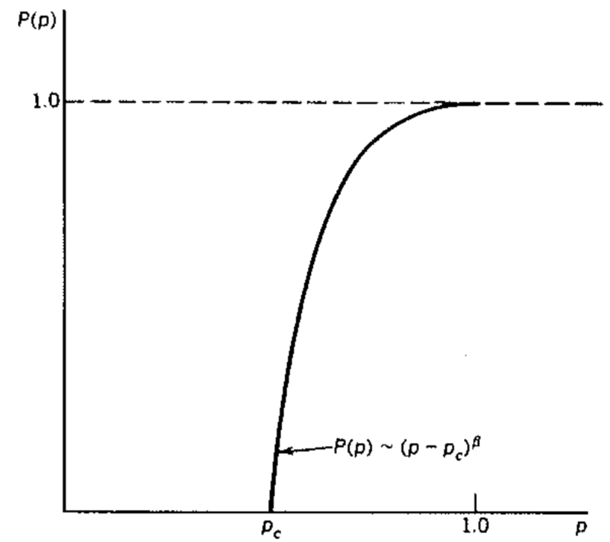
~> Kritischer Exponent β

$\rightarrow$ $P + \sum_s s n_s(p) = p$

Clusterzahl $\Gamma = \sum_s n_s(p)$

$\rightarrow$ Skalierung: $|p - p_c|^{2-\alpha}$

~> Kritischer Exponent α



[3]

Grundlagen - weitere Größen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wkt. Knoten ist Teil eines s-Clusters: $sn_s(p)$

Wkt. Knoten eines endlichen Clusters

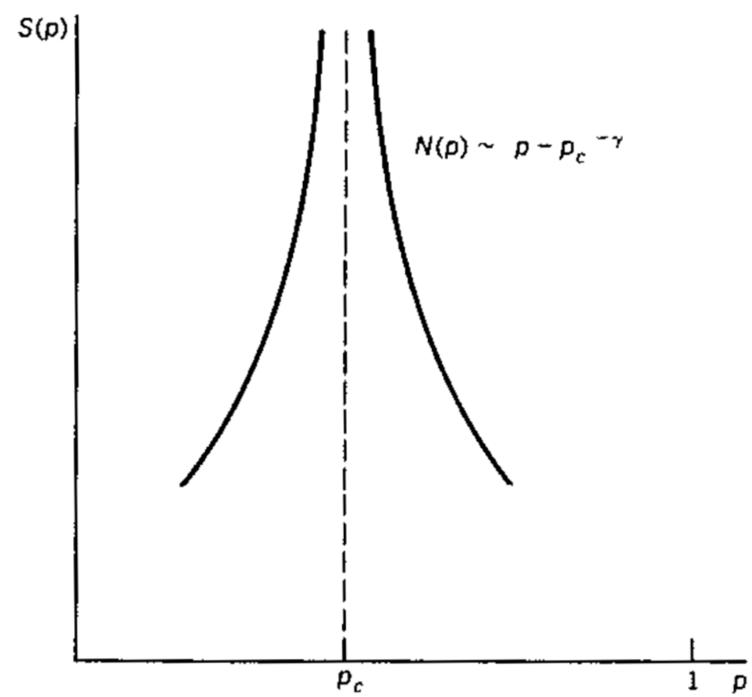
ist Teil eines s-Clusters: $\omega_s(p) = \dfrac{sn_s(p)}{\sum_{s'} s'n_{s'}(p)}$

Mittlere Anzahl Knoten in endlichen Clustern

$$S = \sum_s \omega_s(p)s = \frac{\sum_s s^2 n_s(p)}{\sum_s sn_s(p)}$$

→ Skalierung: $|p - p_c|^{-\gamma}$

~> Kritischer Exponent γ



[3]

Grundlagen - weitere Größen

Radius eines s -Clusters $R_s \sim s^{1/D}$ → Fraktale Dimension D des Clusters

$$R_s^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{i<j} |r_i - r_j|^2$$

[1]

Korrelationslänge ξ

$$\xi^2 = \frac{\sum_s R_s^2 s^2 n_s(p)}{\sum_s s n_s(p)}$$

→ Skalierung: $|p - p_c|^{-\nu}$

~> Kritischer Exponent ν

Grundlagen - Skalierungshypothese

Allgemeines Problem:

Exakte Bestimmung von $n_s(p)$

Ansatz:

Skalierungshypothese $n_s(p) \sim s^{-\tau} f\left[(p - p_c)s^{\sigma}\right]$

$\rightarrow$ $f(x)$ a priori unbekannt

$\rightarrow$ p nahe p_c und $s \gg 1$

$\rightarrow$ Kritische Exponenten durch τ, σ ausdrückbar

Erzeugende Funktion

Hilfsmittel zur Berechnung

Gegeben über $G(\lambda, p) = \sum_s \lambda^s n_s(p)$

Moment der Ordnung k von $n_s(p)$ über Differenziation

$$\sum_s s^k n_s(p) = \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^k G(\lambda = 1, p)$$

Perkolation in einer Dimension

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Clustergrößenverteilung gegeben über $n_s(p) = p^s(1-p)^2$

→ Lösung exakt möglich

→ Erzeugende Funktion $G(\lambda, p) = \sum_s \lambda^s p^s (1-p)^2 \overset{\lambda p < 1}{=} (1-p)^2 \frac{\lambda p}{1-\lambda p}$

$\sum_s s^k n_s(p) = \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^k G(\lambda = 1, p)$

~> 0. Moment: Clusterzahl $\Gamma(p) = G(1,p) = p(1-p)$

~> 1. Moment: Ordnungsparameter $\sum_s s n_s(p) = p(1-p) + p^2 = p$

Vergleich: $P + \sum_s s n_s(p) = p \;\Rightarrow P = \begin{cases} 0, & p < p_c = 1 \\ 1, & p = p_c = 1 \end{cases}$

~> ...

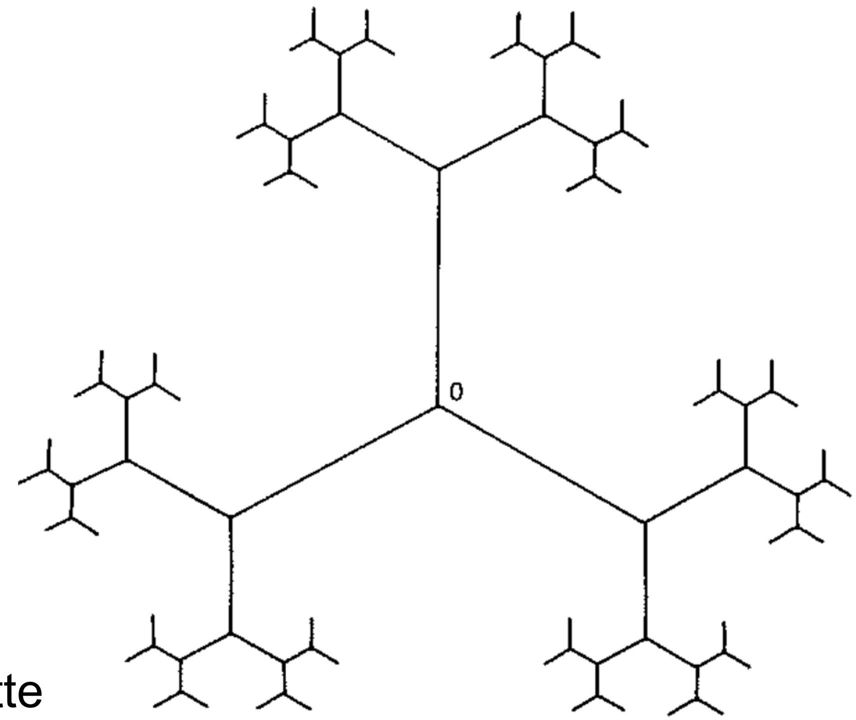
Perkolation auf einem Cayley-Baum

Jeder Knoten hat f nächste Nachbarn

Keine Schleifen

Selbstähnlich

Betrachte Verbindungsperkolation



Caley tree $f = 3$

[3]

Bestimmung der Perkolationsschwelle

$\rightarrow$ Wähle Startpunkt, gehe nach außen

$\rightarrow$ $p(f-1)$ Verbindungen existieren

$\rightarrow$ Statistische Unabhängigkeit der Schritte

$\rightarrow$ $p(f-1) < 1 \;\Rightarrow$ kein unendlicher Cluster

$$\Rightarrow p_c = \frac{1}{f-1}$$

$\rightarrow$ Weitere Berechnungen möglich

Renormierungsgruppe – hierarchisches Gitter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Hierarchisches Diamantgitter

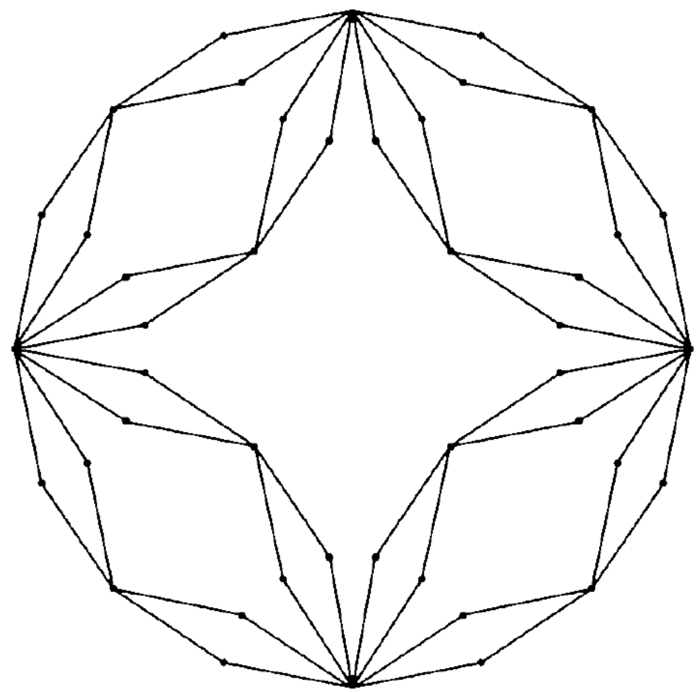
→ unendlich viele nächste Nachbarn

→ selbstähnlich

→ exakte RG-Transformation

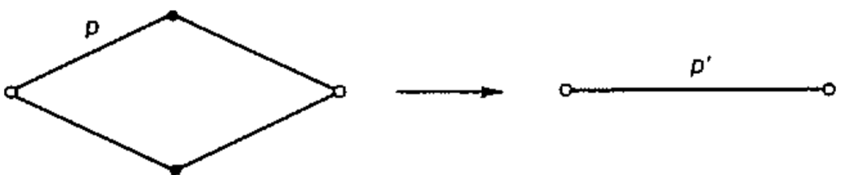
→ selbst wenig physikalische Bedeutung

~> ähnelt RG-Transformation des quadratischen Bravais-Gitters



[3]

→ RG-Schritt invertiert Konstruktion

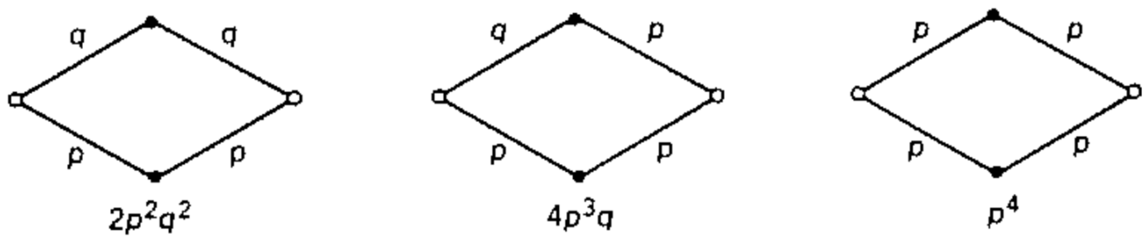


[3]

Renormierungsgruppe – hierarchisches Gitter

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

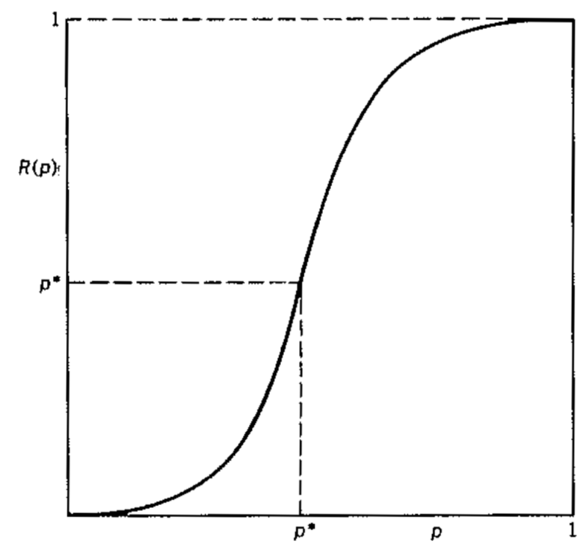
Mögliche Zustände und statistische Gewichte



[3]

$$(q = 1 - p)$$

$$\Rightarrow p' = R(p) = 2p^2 - 4p^4 \quad \text{mit} \quad R(p^*) = p^*$$

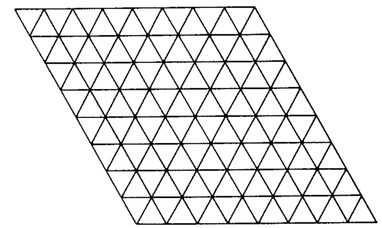


[3]

Drei Fixpunkte

- $\rightarrow \quad p < p^*$ Fixpunkt bei $p = 0$
- $\rightarrow \quad p > p^*$ Fixpunkt bei $p = 1$
- $\rightarrow \quad p = p^* = p_c$ kritischer Fixpunkt

Renormierungsgruppe – Dreiecksgitter

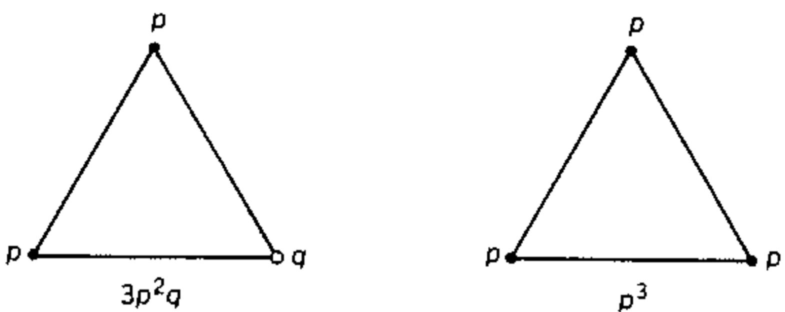


[3]

Betrachte Besetzungsperkolation

Mehrheitsprinzip-RG-Transformation

Mögliche Zustände und statistische Gewichte

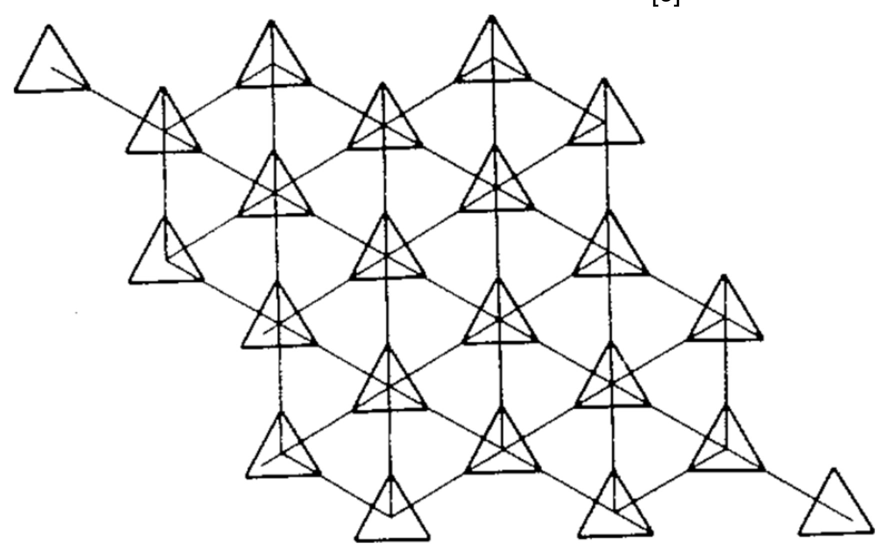


[3]

$$\Rightarrow p' = R(p) = 3p^2 - 2p^3$$

Perkolationsschwelle $p_c = 0.5$

$\rightarrow$ Selbstähnlich $\Rightarrow$ exakt



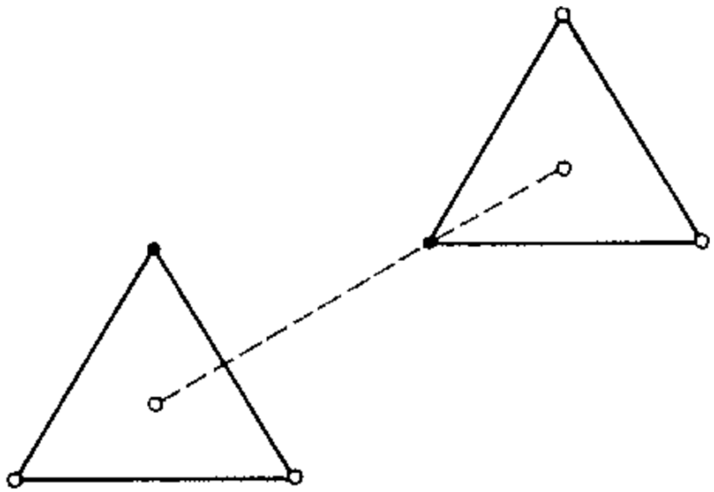
[3]

Renormierungsgruppe – Dreiecksgitter

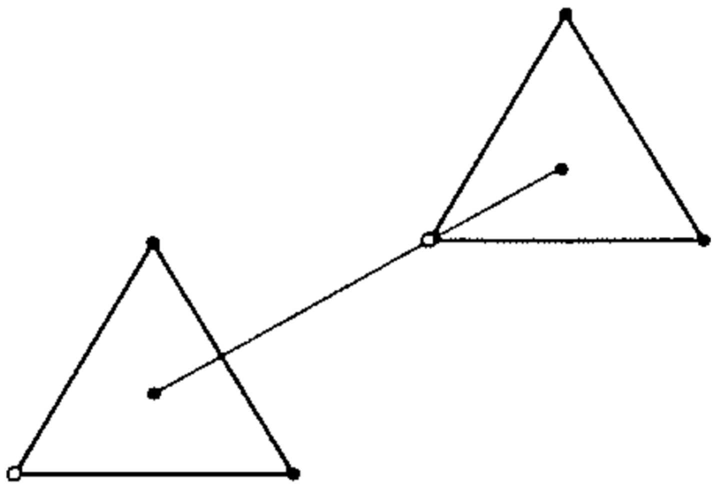
Kritischer Exponent $\nu = 1.3547...$

$\rightarrow$ Theoriewert: $\nu_T = 1.\overline{3}$

$\rightarrow$ gute Übereinstimmung nicht selbstverständlich



(a) [3]



(b) [3]

verbunden $\rightarrow$ nicht verbunden

nicht verbunden $\rightarrow$ verbunden

Quellen

[1] Drossel, Barbara: Komplexe dynamische Systeme, Manuskript zur Vorlesung, Darmstadt, 2016

[2] eigene Arbeit

[3] R. J. Creswick, Horacio A. Farach, Charles P. Poole: Introduction to renormalization group methods in physics, John Wiley and Sons Ltd, New York (1992)

[3] R. J. Creswick, Horacio A. Farach, Charles P. Poole: Introduction to renormalization group methods in physics, John Wiley and Sons Ltd, New York (1992) – überarbeitet